Übungen zur Analysis III WS 08/09

11. Serie

1.* **[2 P.]** Lösen Sie die Anfangswertaufgabe für die Wärmeleitungsgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$ mit der Anfangsbedingung $u(x,0) = e^{-x^2}$.

2.* **[2 P.]** Zeigen Sie, dass die Reihe

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!}\Delta^k \varphi_0(x) + \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}\Delta^k \varphi_1(x) \ .$$

im Konvergenzfall eine Lösung der Aufgabe

$$\begin{aligned} &u_{tt} = \Delta u \ , \quad (x,t) \in I\!R^3 \times (0,\infty) \\ &u(x,0) = \varphi_0(x) \\ &u_t(x,0) = \varphi_1(x) \qquad\qquad \text{ist.} \end{aligned}$$

3. Man zeige, dass alle Lösungen der Form $u(x,t) = v(r,t) \quad (r = |x|)$ der homogenen Wellengleichung $u_{tt} = a^2 \Delta u \quad (x \in I\!R^3 \ , \quad t > 0)$ die Gestalt $u(x,t) = \frac{1}{r}F(r+at) + \frac{1}{r}G(r-at)$ haben, wobei F, G beliebige, zweimal stetig differenzierbare Funktionen sind.

4.* Die Lösung der Aufgabe

$$\begin{aligned} &u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t) \qquad x \in I\!R_1 \\ &u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x) \end{aligned}$$

geschieht in zwei Etappen:

a) $$\begin{aligned} &h_{tt} - a^2 h_{xx} = 0 \\ &h(x,0) = \varphi(x) \ , \quad h_t(x,0) = \psi(x) \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} &v_{tt} - a^2 v_{xx} = f(x,t) \\ &v(x,0) = 0 \ , \quad v_t(x,0) = 0 \ , \end{aligned}$$

mit $u = h + v$

Die Aufgabe a) war Gegenstand der Vorlesung.

Für die Aufgabe b) machen wir den Ansatz $v(x,t) = \int\limits_0^t V(x,t,\tau)d\tau$.

4.1. **[3 P.]** Zeigen sie, dass $v(x,t)$ eine Lösung von b) wird, falls $V(x,t,\tau)$ eine Lösung von

$$\begin{aligned} &V_{tt} - a^2 V_{xx} = 0 \\ &V\Big|_{t=\tau} = 0 \ , \quad V_t\Big|_{t=\tau} = f(x,\tau) \quad \text{ist.} \end{aligned}$$

4.2. **[2 P.]** Nutzen Sie a) zur Gewinnung von V und der Lösung v .

5.* **[2 P.]** Bestimmen Sie alle rotationssymmetrischen Lösungen $u(r)$
(r... radiale Kugelkoordinte) der partiellen Differentialgleichung
$\Delta u = -k^2 u \quad (k \neq 0,$ zeitfreie Wellengleichung Helmholtz-Gleichung)
Hinweis: Man substituiere $v(r) = r \cdot u(r)$.

Zu den mit * gekennzeichneten Aufgaben sind schriftliche Lösungen anzufertigen und in der Woche vom **12.01. - 16.01.** in den Übungen abzugeben.