

# Übungen zur Analysis III      WS 08/09

## 10. Serie

1.\* [2 P.] Zeigen Sie für  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$

a) die Rekursionsformel

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (\text{siehe 14. Serie Analysis I})$$

b) die explizite Formel

$$I_{2n+1} = \frac{2n(2n-2)(2n-4)\cdots 2}{(2n+1)(2n-1)(2n-3)\cdots 3}$$

2.\* [3 P. + 3 P.] Die Legendre-Polynome

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

genügen der Differentialgleichung

$$(x^2 - 1)P_n''(x) + 2xP_n'(x) - n(n+1)P_n(x) = 0$$

(siehe 11. Serie Analysis I). Jede stetig differenzierbare Funktion  $f$  auf  $[-1, 1]$  lässt

sich in der Form  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x)$  darstellen.

Berechnen Sie

a)  $\int_{-1}^{+1} (P_n(x))^2 dx$

b)  $\int_{-1}^{+1} P_m(x)P_n(x)dx$  für  $m \neq n$

3. Zeigen Sie:

Das Dirichlet-Problem für die Kugel  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$  mit der Randbedingung

$$u(R \sin \vartheta \cos \varphi, R \sin \vartheta \sin \varphi, R \cos \vartheta) = f(\vartheta)$$

hat die Lösung

$$u(r \sin \vartheta \cos \varphi, r \sin \vartheta \sin \varphi, r \cos \vartheta) = \sum_0^{\infty} c_n r^n P_n(\cos \vartheta)$$

mit  $c_n = \frac{2n+1}{2R^n} \int_0^{\pi} f(\vartheta) P_n(\cos \vartheta) \sin \vartheta \, d\vartheta$ , wobei die Funktionen  $P_n$  die Legendre-Polynome sind.

Zu den mit \* gekennzeichneten Aufgaben sind schriftliche Lösungen anzufertigen und in der Woche vom **05.01.** - **09.01.** in den Übungen abzugeben.