Übungen zur Analysis III WS 08/09

5. Serie

1. Es sei $\partial\Omega$ eine Randfläche und $\vec{l}$ ein beliebiger aber fester Vektor im $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie

$$\int\limits_{\partial\Omega} \cos(\vec{n}, \vec{l}\,)do = 0\,.$$

2.* **[2 P.]** Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$\int\limits_{x^2+y^2+z^2=R^2} \Big((y^2+z^2)x + (x^2+z^2)y + (x^2+y^2)z\Big)\, do$$

mit Hilfe des Integralsatzes von Gauß.

3. Bestätigen Sie den Integralsatz von Stokes für die Vektorfunktion $f(x,y,z) = (x,y,z)$ auf dem Flächenstück $z = x^2 - y^2, x^2 + y^2 \leq a^2$.

4.* **[(3 + 3 P.]** Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$$

entlang des Randes der Fläche $x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ x, y, z \geq 0$, beginnend bei $(a, 0, 0)$ über $(0, a, 0), (0, 0, a)$ bis $(a, 0, 0)$ mit Hilfe des Integralsatzes von Stokes

a) durch Projektion auf die $x - y$-Ebene

b) durch Verwendung von Kugelkoordinaten.

5. Zu einer Parameterdarstellung Φ einer Fläche und einem stetig differenzierbaren Vektorfeld $\vec{F} = (f, g, h)$ auf dieser Fläche sei

$$U(u,v) = \vec{F}\,(\Phi(u,v)) \cdot \phi_u(u,v) \quad \text{und} \quad V(u,v) = \vec{F}\,(\Phi(u,v)) \cdot \phi_v(u,v)\,.$$

a) Zeigen Sie $\dfrac{\partial V}{\partial u} - \dfrac{\partial U}{\partial v} = \mathrm{rot}\vec{F} \cdot (\phi_u \times \phi_v)\,.$

b) Führen Sie den Integralsatz von Stokes zurück auf den Integralsatz von Green.

Zu den mit * gekennzeichneten Aufgaben sind schriftliche Lösungen anzufertigen und in der Woche vom **17. 11. - 21. 11.** in den Übungen abzugeben.