Übungen zur Analysis III WS 08/09

4. Serie

1.* [2 P.] Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_{\mathcal{K}} \left(3x^2 + 2x\sin\frac{x}{y} + \frac{x^2}{y}\cos\frac{x}{y}\right)dx - \frac{x^3}{y^2}\cos\frac{x}{y}\,dy$$

($\mathcal{K}$ geradlinig von $(0,1)$ nach $(\pi,2)$) mit Hilfe eines Potentials.

2. Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int\limits_{\mathcal{K}} (x+z)dx-(y+z)dy+(x-y)dz$ entlang der Schraubenlinie $x=2\cos t\,, y=2\sin t\,, z=t/\pi$ von $(2,0,0)$ nach $(-2,0,5)$ mit Hilfe eines Potentials.

3.* [3 P.] Berechnen Sie das Integral $\int \vec{F}\,d\vec{o}$ mit $\vec{F}(x,y,z)=(y-z,z-x,x-y)$ über den Kegel $x^2+y^2=z^2\,, 0\le z\le h\,$, nach außen orientiert.

4. Berechnen Sie das Integral $\int \vec{F}d\vec{o}$ mit $\vec{F}(x,y,z)=(yz,xz,xy)$ über die innere Seite der unteren Halbkugelfläche $x^2+y^2+z^2=1\,, z\le 0$

a) direkt

b) mit Hilfe des Integralsatzes von Gauß.

5. Berechnen Sie das Integral $\int \vec{F}d\vec{o}$ mit $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,(x^2+y^2)z)$ über die Oberfläche des Zylinders $\{(x,y,z): x^2+y^2\le R^2 \wedge |z|\le 1\}$

a) direkt

b) mit Hilfe des Integralsatzes von Gauß.

6. Berechnen Sie das Integral $\int \vec{F}d\vec{o}$ mit $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,z)$ über die Oberfläche der Kugel $x^2+y^2+z^2\le R^2$

a) mit Kugelkoordinaten

b) durch Projektion auf die $x-y$-Ebene

c) als Oberflächenintegral erster Art

d) mit dem Integralsatz von Gauß.

7.* [2 P.] Berechnen Sie das Integral $\int \vec{F}d\vec{o}$ mit $\vec{F}(x,y,z)=(x+x^2y\,z, y+xy^2\,z, z-2xyz^2)$ über die nach oben orientierte obere Hälfte der Kugelfläche $x^2+y^2+z^2=4$ mit Hilfe des Integralsatzes von Gauß.

8. Bestätigen Sie den Greenschen Integralsatz $\int\limits_{\partial\Omega} f(x,y)dx+g(x,y)dy = \iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}\right)d(x,y)$ in den Spezialfällen

a) $g=0\wedge\Omega=\{(x,y): a\le x\le b\wedge h_1(x)\le y\le h_2(x)\}$

b) $f=0\wedge\Omega=\{(x,y): c\le y\le d\wedge k_1(y)\le x\le k_2(y)\}$.

Wie läßt sich damit der Greensche Integralsatz im allgemeinen Fall begründen?

Zu den mit * gekennzeichneten Aufgaben sind schriftliche Lösungen anzufertigen und in der Woche vom **10. 11. - 14. 11.** in den Übungen abzugeben.