Analysis III
FSU Jena - WS 07/08
Serie 15 - Lösungen

Stilianos Louca

2. März 2008

Aufgabe 01

Betrachtung der Konvergenz

Betrachten die Fourier-Reihe

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} [a_n \sin(nx) + b_n \cos(nx)]$$

der 2π-periodischen Funktion f. Dann gilt: Ist f stetig und außerdem stückweise stetig differenzierbar, so konvergiert die Fourierreihe von f gleichmäßig gegen f. Ist f nur stetig, so konvergiert die Fourierreihe nur punktweise gegen f. Ist f nicht mal stetig, so liegt im allgemeinen keine Konvergenz vor!

a) Die Funktion

$$f(x) = x^2$$

ist stetig, und sogar stückweise stetig differenzierbar. Somit ist die Fourierreihe $\tilde{f}$ gleichmäßig konvergent gegen f.

b) Analog zu vorhin ist auch

$$f(x) = |x|$$

stückweise stetig differenzierbar, so dass auch hier $\tilde{f} \to f$ geht.

c) Im Gegensatz zu vorhin, ist hier

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x)$$

nicht stetig! Die Fourierreihe konvergiert also nur Punktweise gegen $f(x)$ außer an den Rändern! Dort geht $\tilde{f}(x) \to 0$.

d) Im allgemeinen Fall ist $b \neq -a$ so dass f nicht stetig ist. Somit geht $\tilde{f}$ nur punktweise gegen $f(x)$. An den Rändern geht $\tilde{f}$ ferner gegen $\frac{\pi}{2}(b-a)$.

e) Hier ist wiederum die gleichmäßige Konvergenz von $\tilde{f}$ gesichert, da

$$f(x) = \cosh(ax)$$

stetig und stückweise stetig differenzierbar ist.

f) Analog ist auch

$$f(x) = |\sin x|$$

stückweise stetig differenzierbar so dass $\tilde{f}$ gleichmäßig gegen f konvergiert.

Berechnung der Summen

a) Beginnend mit der Fourier-Darstellung

$$f(x) = |x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos((2n+1)x)$$

setzen wir $x = 0$ und bekommen so

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

b) Wir beginnen mit der Fourier-Darstellung

$$f(x) = x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

setzen $x = 0$ und formen um

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - ... + \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4} = \frac{\pi^2}{12}$$

c) Verwenden die beiden vorigen Ergebnisse und schreiben

$$\frac{\pi^2}{6} = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2}{(2n+1)^2} + \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)^2} \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{(2n)^2}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

d) Beginnend mit

$$f(x) = \cosh(ax) = \frac{\sinh(a\pi)}{\pi a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a \sinh(a\pi)}{\pi(a^2+n^2)} (-1)^n \cdot \cos(nx)$$

setzen wir $x = \pi$ und erhalten so

$$\cosh(a\pi) = \frac{\sinh(a\pi)}{a\pi} + \frac{\sinh(a\pi)}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a}{(a^2+n^2)} \quad \to \quad \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a}{(a^2+n^2)} = \pi \coth(a\pi)$$

Aufgabe 02

Betrachten zuerst das Problem P_1

$$\Delta u(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial 2^2}(x,y) = 0$$

$$u(0,y) = u(a,y) = 0$$

$$u(x,0) = \psi_1(x) \ , \ u(x,b) = \psi_2(x)$$

dessen Lösung gegeben sei durch die Abbildung

$$u(x,y) = \mathcal{L}(a,b,\psi_1,\psi_2)(x,y)$$

Dann ist auch das Problem

$$\Delta v(x,y) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 v}{\partial 2^2}(x,y) = 0$$

$$v(0,y) = \varphi_1(y) \ , \ v(a,y) = \varphi_2(y)$$

$$v(x,0) = 0 = v(x,b)$$

lösbar durch

$$v(x,y) = \mathcal{L}(b,a,\varphi_1,\varphi_2)(y,x)$$

Somit ist schließlich auch das Problem

$$\Delta f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial 2^2}(x,y) = 0$$

$$f(0,y) = \varphi_1(y)\ ,\ f(a,y) = \varphi_2(y)$$

$$f(x,0) = \psi_1(x)\ ,\ f(x,b) = \psi_2(x)$$

lösbar durch Superposition der beiden Lösungen gemäß

$$f(x,y) = \mathcal{L}(a,b,\psi_1,\psi_2)(x,y) + \mathcal{L}(b,a,\varphi_1,\varphi_2)(y,x)$$

Wir müssen uns demnach nur mit der Bestimmung von $\mathcal{L}(a,b,\psi_1,\Psi_2)$ befassen. Dazu machen wir den Separationsansatz

$$u(x,y) = \Phi(x)\cdot\Theta(y)$$

was uns direkt auf die Gleichung

$$\Phi''(x)\Theta(y) + \Phi(x)\Theta''(y) = 0 \ \rightarrow\ \frac{\Phi''}{\Phi} = -\frac{\Theta''}{\Theta} =: h \in \mathbb{R}$$

führt. Die Lösung oberer Differentilgleichungen ergeben sich als

$$\mathbf{h \neq 0} : \Phi(x) = Ae^{\sqrt{h}x} + Be^{-\sqrt{h}x}\ ,\ \Theta(y) = Ce^{\sqrt{-h}y} + De^{-\sqrt{-h}y}$$

$$\mathbf{h = 0} : \Phi(x) = A + Bx\ ,\ \Theta(y) = C + Dy$$

Aufgrund der Randbedingungen

$$u(0,y) = u(a,y) = 0\ \forall\ y$$

folgt

$$\Phi(0) = \Phi(a) = 0\ \rightarrow\ A = -B\ \wedge\ e^{\sqrt{h}a} = e^{-\sqrt{h}a}$$

Obere Beziehung kann nur gelten falls $h \leq 0$ ist. Für $h = 0$ ergibt sich die Triviale Lösung

$$\Phi(x) = 0$$

die uns nicht weiter interessiert! Somit ist $h < 0$ und mit

$$\omega := \sqrt{-h}$$

erhält man die Grundlösungen

$$\omega_n = \frac{\pi n}{a}\ \rightarrow\ \Phi_n(x) = A_n\sin(\omega_n x)\ ,\ \Theta(y) = C_n e^{\omega_n y} + D_n e^{-\omega_n y}$$

und die allgemeine Lösung als

$$u(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sin(\omega_n x)\cdot\left[C_n e^{\omega_n y} + D_n e^{-\omega_n y}\right]$$

wobei hier o.B.d.A $A_n = 1$ gesetzt wurde! Durch die Randbedingung

$$u(x,0) = \psi_1(x)\ ,\ u(x,b) = \psi_2(x)$$

erhält man

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \sin(\omega_n x)\cdot\underbrace{\left[C_n + D_n\right]}_{\mathcal{W}_n} = \psi_1(x)$$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \sin(\omega_n x)\cdot\underbrace{\left[C_n e^{\omega_n b} + D_n e^{-\omega_n b}\right]}_{\mathcal{V}_n} = \psi_2(x)$$

Durch Fouriertransformation erhält man die unbekannten Faktoren $\mathcal{W}_n$ und $\mathcal{V}_n$ gemäß

$$\mathcal{W}_n = \frac{1}{a} \cdot \int\limits_{-a}^{a} \tilde{\psi}_1(x) \cdot \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right) \, dx$$

$$\mathcal{V}_n = \frac{1}{a} \cdot \int\limits_{-a}^{a} \tilde{\psi}_2(x) \cdot \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right) \, dx$$

wobei $\tilde{\psi}_1$ bzw. $\tilde{\psi}_2$ die ungeraden Fortsetzungen der Funktionen ψ_1 bzw. ψ_2 auf das Intervall $[-a, a]$ sind. Durch algebraische Umformungen erhält man dann

$$C_n = \frac{\mathcal{V}_n - \mathcal{W}_n e^{-\omega_n b}}{\sinh(\omega_n b)} \ , \ D_n = \frac{\mathcal{W}_n e^{\omega_n b} - \mathcal{V}_n}{\sinh(\omega_n b)}$$

und schließlich die Lösung des Randwertproblems als

$$u(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\sin(\omega_n x)}{\sinh(\omega_n b)} \cdot \left[\left(\mathcal{V}_n - \mathcal{W}_n e^{-\omega_n b}\right) \cdot e^{\omega_n y} + \left(\mathcal{W}_n e^{\omega_n b} - \mathcal{V}_n\right) \cdot e^{-\omega_n y}\right]$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\sin(\omega_n x)}{\sinh(\omega_n b)} \cdot \left[\mathcal{W}_n \sinh(\omega_n b - \omega_n y) + \mathcal{V}_n \sinh(\omega_n y)\right]$$

Aufgabe 03

Die Anfangsposition der Seite ist gegeben durch

$$u(x,0) =: \varphi(x) := h - \frac{4h}{L^2}\left(x - \frac{L}{2}\right)^2 = -\frac{4h}{L^2} \cdot x^2 + \frac{4h}{L} \cdot x$$

Wir machen für $u(x,y)$ den Ansatz

$$u(x,t) = \Phi(x) \cdot \Theta(t)$$

und erhalten so die Gleichung

$$\Delta u - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Phi''(x)\Theta(t) - \frac{1}{c^2} \cdot \Theta''(t)\Phi(x) = 0 \ \rightarrow \ \frac{\Phi''}{\Phi} = \frac{\Theta''}{c^2\Theta} =: h =: -k^2$$

wobei wir hinsichtlich der zu erfüllenden Randbedingungen die konstante h nicht positiv gewählt haben. Die allgemeinen Lösungen obiger DGL sind gegeben durch

$$\mathbf{k \neq 0} : \Phi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \ , \ \Theta(t) = Ce^{ickt} + De^{-ickt} \ , \ \mathbf{k = 0} : \Phi(x) = A + Bx \ , \ \Theta(t) = C + Dt$$

Um die Randbedingung

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \ \forall \ t$$

zu erfüllen muss

$$\Phi(0) = \Phi(L) = 0$$

sein. Dies führt zur Quantisierung der erlaubten k

$$A + B = 0 \ \wedge \ e^{ikL} = e^{-ikL} \ \rightarrow \ k_n = \frac{n\pi}{L} \ , \ n \in \mathbb{N}$$

und somit zur allgemeinen Lösung

$$u(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sin(k_n x) \cdot \left[C_n e^{i\omega_n t} + D_n e^{-i\omega_n t}\right] \ , \ k_n := \frac{n\pi}{L}, \ \omega_n := k_n c$$

Bemerke: Der Fall $k = 0$ führt nur zur trivialen Lösung $\Phi_n(x) \equiv 0$.
Durch die Randbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sin(k_n x) \cdot i\omega_n \left[C_n - D_n\right] \overset{!}{=} 0 \;\forall\; x$$

ergibt sich $C_n = D_n$ und somit die Darstellung

$$u(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{W}_n \cdot \sin(k_n x) \cdot \cos(\omega_n t)$$

wobei sich die $\mathcal{W}_n$ aus der Anfangsbedingung

$$u(x,0) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{W}_n \cdot \sin(k_n x) \overset{!}{=} \varphi(x)$$

ergeben, gemäß

$$\mathcal{W}_n = \frac{1}{L} \cdot \int\limits_{-L}^{L} \tilde{\varphi}(x) \cdot \sin(k_n x)\; dx = \frac{1}{L} \cdot \int\limits_{0}^{L} \varphi(x) \cdot \sin(k_n x)\; dx = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x) \cdot \sin(k_n x)\; dx$$

wobei $\tilde{\varphi}$ die ungerade Fortsetzung von φ auf das Intervall $[-L, L]$ ist. Also:

$$\mathcal{W}_n = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x) \cdot \sin(k_n x)\; dx = \frac{8h}{L^2} \cdot \int_0^L x \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)\; dx - \frac{8h}{L^3} \cdot \int_0^L x^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\; dx$$

$$= \frac{8h}{L^2} \cdot \frac{L^2}{n^2\pi^2} \cdot \left[\sin u - u\cos u\right]_0^{n\pi} - \frac{8h}{L^3} \cdot \frac{L^3}{n^3\pi^3} \cdot \left[2u\sin(u) - (u^2-2)\cos u\right]_0^{n\pi}$$

$$= \frac{8h}{n^2\pi^2} \cdot \left[\left(n^2\pi^2 - n\pi - 2\right) \cdot (-1)^n + 2\right]$$

Somit ist die Auslenkung gegeben durch

$$\boxed{u(x,t) = \frac{8h}{\pi^2} \cdot \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2} \cdot \left[\left(n^2\pi^2 - n\pi - 2\right) \cdot (-1)^n + 2\right] \cdot \sin(k_n x) \cdot \cos(\omega_n t)}$$

Aufgabe 04

a) Wir machen den Ansatz

$$u(x,t) = S(x) + H(x,t)$$

wobei S das Problem

$$S_{xx} = 0\ ,\ S(0) = u_0\ ,\ S(L) = u_L$$

löst. Somit erhält man für S

$$S(x) = u_0 + \frac{u_L - u_0}{L} \cdot x$$

und ferner für H:

$$H_t(x,t) - a^2 H_{xx}(x,t) = 0\ ,\ H(0,t) = H(L,t) = 0\ ,\ H(x,0) = \varphi(x) - S(x) =: \psi(x)$$

Wir machen den Separationsansatz

$$H(x,t) = T(t) \cdot G(x)$$

und erhalten die gewöhnlichen DGL

$$H_t - a^2 H_{xx} = T'G - a^2 TG'' = 0 \;\rightarrow\; \frac{T'}{a^2 T} = \frac{G''}{G} =: -k^2\ ,\ k \geq 0$$

deren allgemeine Lösungen sich ergeben als

$$G(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

$$T(t) = T_0 e^{-a^2k^2t}$$

wobei wir o.B.d.A $a > 0$ gesetzt haben. Durch die Randbedingung

$$H(0,t) = H(L,t) = 0 \;\forall\; t$$

erhält man eine Quantisierung der k-Werte

$$G(0) = G(L) = 0 \;\rightarrow\; A + B = 0 \;\wedge\; e^{ikL} = e^{-ikL} \;\;\rightarrow\; k = \frac{\pi n}{L} =: k_n \;,\; n \in \mathbb{N}$$

und somit die Lösungsfolge

$$G_n(x) = Ae^{ik_nx} + Be^{-ik_nx} \cong \mathcal{A}\sin(k_nx)$$

Wir setzen o.B.d.A $\mathcal{A} = 1$ und schreiben die allgemeine Lösung auf

$$H(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{T}_n \cdot e^{-a^2k_n^2t} \cdot \sin(k_nx)$$

Für $t = 0$ muss gelten

$$H(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{T}_n \cdot \sin(k_nx) \stackrel{!}{=} \psi(x)$$

so dass sich die Koeffizienten $\mathcal{T}_n$ ergeben als

$$\mathcal{T}_n = \frac{2}{L} \cdot \int_0^L \psi(s) \cdot \sin(k_ns)\; ds$$

und die endgültige Lösung des Problems als

$$\boxed{u(x,t) = S(x) + H(x,t) = u_0 + \frac{u_L - u_0}{L} \cdot x + \frac{2}{L} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_0^L \psi(s) \cdot \sin(k_ns)\; ds \right\} \cdot e^{-a^2k_n^2t} \cdot \sin(k_nx)}$$

b) Für

$$\varphi(x) = -x^2 + \left(L + \frac{5}{L}\right)x \;,\; u_0 = 0 \;,\; u_L = 5$$

ist

$$\psi(x) = \varphi(x) - S(x) = Lx - x^2$$

und somit

$$\mathcal{T}_n = \frac{2}{L} \cdot \int_0^L (-x^2 + Lx) \cdot \sin(k_nx)\; dx = -\frac{2}{Lk_n^2} \cdot \left[2x\sin(k_nx) - \frac{(k_n^2x^2 - 2)}{k_n}\cos(k_nx) \right]_0^L + \frac{2}{k_n} \cdot \left[\frac{1}{k_n}\sin(k_nx) - x\cos(k_nx) \right]_0^L$$

$$= \frac{4}{Lk_n^3} \cdot [1 - (-1)^n] = \frac{4L^2}{\pi^3n^3} \cdot [1 - (-1)^n]$$

weshalb sich die Lösung des Problems ergibt als

$$\boxed{u(x,t) = \frac{5}{L}x + \frac{8L^2}{\pi^3} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \cdot e^{-a^2k_{2n-1}^2t} \cdot \sin(k_{2n-1}x)}$$

Aufgabe 05

Wir machen den Ansatz

$$u(r,\varphi) = P(r)\cdot\Phi(\varphi)$$

und bekommen so

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = P''\Phi + \frac{\Phi}{r}P' + \frac{P}{r^2}\Phi'' \stackrel{!}{=} 0 \;\rightarrow\; \frac{\Phi''}{\Phi} = -\frac{P''}{P}r^2 - \frac{rP'}{P} =: -k^2$$

Die allgemeinen Lösungen der beiden DGL ergeben sich als

$$\Phi(\varphi) = Ae^{ik\varphi} + Be^{-ik\varphi} \qquad\qquad P(r) = Cr^k + Dr^{-k}$$

Durch die Randbedingung

$$u(r,0) = u(r,\alpha) = 0 \;\forall\; r\in[0,R)$$

ergibt sich notwendigerweise

$$\Phi(0) = \Phi(a) = 0$$

und man erhält eine Quantisierung der k

$$A = -B \;\wedge\; e^{ik\alpha} = e^{-ik\alpha} \;\rightarrow\; k_n = \frac{n\pi}{\alpha}\;,\; n\in\mathbb{N}$$

Somit kann man die allgemeine Lösung aufschreiben als

$$u(r,\varphi) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sin(k_n\varphi)\cdot\left[C_n r^{k_n} + D_n r^{-k_n}\right]$$

Fordern wir außerdem die Endlichkeit für die Lösung in $r=0$ so müssen die D_n verschwinden, also

$$u(r,\varphi) = \sum_{n\in\mathbb{N}} C_n\cdot r^{k_n}\cdot\sin(k_n\varphi)$$

Durch die Randbedingung

$$u(R,\varphi) = \sum_{n\in\mathbb{N}} C_n\cdot R^{k_n}\cdot\sin(k_n\varphi) \stackrel{!}{=} c\varphi$$

ergeben sich die Koeffizienten C_n als

$$C_n = \frac{2R^{-k_n}}{\alpha}\cdot\int_0^\alpha c\varphi\cdot\sin(k_n\varphi)\;d\varphi = \frac{2cR^{-k_n}}{\alpha k_n^2}\cdot\left[\sin(k_n\varphi) - k_n\varphi\cos(k_n\varphi)\right]_0^\alpha = -\frac{2c\alpha}{n\pi}\cdot R^{-\frac{n\pi}{\alpha}}\cdot(-1)^n$$

Aufgabe 06

Wir machen den Ansatz

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^\infty\left[a_n\cos\left(\frac{\pi n v}{L}t\right) + b_n\sin\left(\frac{\pi n v}{L}t\right)\right]\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$$

wobei die a_n, b_n genügend schnell verschwinden sollen um die Konvergenz zu sichern und zeigen dass dieser die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

erfüllt:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$= -\sum_{n=1}^\infty\frac{\pi^2n^2}{L^2}\cdot\left\{\left[a_n\cos\left(\frac{\pi n v}{L}t\right) + b_n\sin\left(\frac{\pi n v}{L}t\right)\right]\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) - \frac{1}{v^2}\left[a_n v^2\cos\left(\frac{\pi n v}{L}t\right) + b_n v^2\sin\left(\frac{\pi n v}{L}t\right)\right]\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)\right\} = 0$$

Durch die allgemeinen Anfangsbedingungen

$$u(x,0) = \varphi(x) \ \wedge \ u_t(x,0) = \psi(x)$$

ergibt sich mit

$$k_n := \frac{\pi n}{L} \ , \ n \in \mathbb{N}$$

die Berechnungs-Vorschrift für die Koeffizienten a_n, b_n gemäß:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sin(k_n x) \stackrel{!}{=} \varphi(x) \ \rightarrow \ a_n = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x) \cdot \sin(k_n x) \ dx$$

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n c k_n \cdot \sin(k_n x) \stackrel{!}{=} \psi(x) \ \rightarrow \ b_n = \frac{2}{c\pi n} \cdot \int_0^L \psi(x) \cdot \sin(k_n x) \ dx$$

In unserem Spezialfall sind die Anfangsbedingungen gegeben durch

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{hx}{c} & : x \in [0,c] \\ \dfrac{h}{c-L}(x-L) & : x \in [c,L] \end{cases} \quad \wedge \ \psi(x) \equiv 0$$

Somit sind die $b_n = 0$ und

$$a_n = \frac{2h}{cL} \int_0^c x \cdot \sin(k_n x) \ dx + \frac{2h}{(c-L)L} \int_c^L (x-L) \cdot \sin(k_n x) \ dx$$

$$= \frac{2h}{cL} \cdot \left[-\frac{x}{k_n} \cos(k_n x) + \frac{1}{k_n^2} \sin(k_n x) \right]_0^c + \frac{2h}{(c-L)L} \cdot \left[-\frac{x}{k_n} \cos(k_n x) + \frac{1}{k_n^2} \sin(k_n x) \right]_c^L + \frac{2h}{(c-L)k_n} \left[\cos(k_n x) \right]_c^L$$

$$= \frac{2h}{c k_n^2 (L-c)} \cdot \sin(k_n c) = \frac{2hL^2}{cn^2\pi^2(L-c)} \cdot \sin\left(\frac{\pi n c}{L}\right)$$

und somit die Lösung als

$$\boxed{u(x,t) = \frac{2hL^2}{c\pi^2(L-c)} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \sin\left(\frac{\pi n c}{L}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi n v}{L} t\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right)}$$