Übungen zur Vorlesung Analysis III (WS 07/08)

15. und letzte Übungsserie

1. a) Untersuchen Sie die aus der Aufgabe 4 der Serie 14 resultierenden Fourier-Reihen auf Konvergenz.

b) Berechnen Sie die folgenden Summen

(1) $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)^2} + \ldots$

(2) $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n^2} + \ldots$

(3) $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$

(4) $\frac{1}{a} + \frac{2a}{a^2+1^2} + \ldots + \frac{2a}{a^2+n^2} + \ldots \qquad (a \neq 0)$.

2. Lösen Sie das folgende Dirichlet-Problem für das Rechteck $A = [0,a] \times [0,b]$:

$$\begin{aligned} &\Delta u = 0 \ \text{ in } \overset{\circ}{A} \\ &u(0,y) = \varphi_1(y)\ , \quad u(a,y) = \varphi_2(y) \\ &u(x,0) = \psi_1(x)\ , \quad u(x,b) = \psi_2(x)\ . \end{aligned}$$

<u>Hinweis:</u> Warum genügt es zunächst, $\varphi_1(y) = \varphi_2(y) = 0$ zu betrachten?

3. Eine homogene Saite der Länge L, die an den Enden $x = 0$ und $x = L$ eingespannt ist, sei zum Zeitpunkt t in Form einer Parabel ausgelenkt, deren Scheitelpunkt um h von $x = \frac{L}{2}$ entfernt ist. Bestimmen Sie die Auslenkung $u(x,t)$, wenn der Saite keine Anfangsgeschwindigkeit erteilt wird.

4. a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $u(x,t)$ des Rand-Anfangswert-Problems für einen endlichen Wärmeleiter der Länge L:

$$\begin{aligned} &u_t - a^2 u_{xx} = 0 \quad u(0,t) = u_0\ , \quad u(L,t) = u_L \\ &u(x,0) = \varphi(x)\ , \ \text{wobei } \varphi(0) = u_0\ , \ \varphi(L) = u_L\ . \end{aligned}$$

Hinweis: Separieren Sie die stationäre Lösung ab.

b) Geben Sie die Lösung für

$$u_0 = 0 \quad u_L = 5\ , \quad \varphi(x) = -x^2 + (L + \frac{5}{L})x \text{ an.}$$

5. Entwickeln Sie einen Lösungsweg mittels Fouriermethode für die Laplace-Gleichung im Kreissektor:

$$\begin{aligned} &\Delta u = 0 \qquad 0 < r < R \qquad 0 < \varphi < \alpha \\ &u(r,0) = u(r,\alpha) = 0\ , \quad u(R,\varphi) = c \cdot \varphi \end{aligned}$$

6. Lösen sie das Problem der gezupften Saite, d.h. Problemstellung wie in Aufgabe 3, aber die Anfangsauslenkung in Form eines Dreiecks mit der Höhe h im Punkt c $(0 < c < L)$.