Analysis III
FSU Jena - WS 07/08
Serie 14 - Lösungen

Stilianos Louca

2. März 2008

Aufgabe 01

Vorbemerkung: Das Problem

$$u_t - a^2 \Delta u = 0\ ,\ u(x,0) = f(x)$$

kann durch die Substitution

$$u(x,t) =: v\left(\frac{x}{a}, t\right)\ ,\ g(x) := f(ax)$$

auf das Problem

$$v_t - \Delta v = 0\ ,\ v(x,0) = g(x)$$

zurückgeführt werden, dessen Lösung sich ergibt als die Faltung

$$v(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \Phi(x-y,t) g(y)\ dy$$

wobei

$$\Phi(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4t}} & : t > 0 \\ 0 & : t < 0 \end{cases}$$

die so genannte Grundlösung des Problems ist. Somit ist

$$u(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{x}{a} - y, t\right) f(ay)\ dy$$

Lösung der Aufgabe: Das Problem

$$u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t),\ u(x,0) = 0$$

wird gelöst durch

$$u(x,t) = \int_0^t w(x,t,\tau)\ d\tau$$

wobei w die Bedingungen

$$w_t - a^2 w_{xx} = 0\ ,\ w_{t=\tau} = f(x,\tau)$$

erfüllt, denn:

$$u_t - a^2 u_{xx} = w(x,t,t) + \int_0^t w_t(x,t,\tau)\ d\tau - a^2 \int_0^t w_{xx}(x,t,\tau)\ d\tau = f(x,t) + \int_0^t \underbrace{\left[w_t(x,t,\tau) - a^2 w_{xx}(x,t,\tau)\right]}_{0}\ d\tau = f(x,t)$$

$$u(x,0) = \int_0^0 w(x,t,\tau)\ d\tau = 0$$

Für $w(x,t,\tau)$ machen wir den Ansatz

$$w(x,t,\tau) = \zeta^\tau(x, t-\tau)$$

wobei die Schar ζ^τ das Problem

$$\zeta^\tau_t - a^2 \zeta^\tau_{xx} = 0 \ , \ \zeta^\tau(x,0) = f(x,\tau)$$

löst. Somit ergibt sich die Lösung für ζ^τ sofort als

$$\zeta^\tau(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \Phi\left(\frac{x}{a} - y, t\right) \ f(ay,\tau) \ dy$$

und somit w als

$$w(x,t,\tau) = \zeta^\tau(x,t-\tau) = \int_{\mathbb{R}} \Phi\left(\frac{x}{a} - y, t-\tau\right) f(ay,\tau) \ dy$$

Schließlich ergibt sich die Lösung des ursprünglichen Problems als

$$\boxed{u(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Phi\left(\frac{x}{a} - y, t-\tau\right) f(ay,\tau) \ dy \ d\tau}$$

Aufgabe 02

Zu zeigen wäre dass die Funktionen $\cos n\varphi, \sin n\varphi, 1$ bzgl. des Skalarproduktes

$$\langle f, g\rangle := \int_0^{2\pi} f(\varphi)\cdot g(\varphi) \ d\varphi$$

orthogonal sind. Wir rechnen also stur aus

$$\mathbf{n \neq m} : \int_0^{2\pi} \sin n\varphi \cdot \cos m\varphi \ d\varphi = \frac{1}{2}\cdot \int_0^{2\pi} \left[\sin\left[(n-m)\varphi\right] + \sin\left[(n+m)\varphi\right]\right] \ d\varphi = -\frac{1}{2}\cdot \left[\frac{\cos\left[(n-m)\varphi\right]}{n-m} + \frac{\cos\left[(n+m)\varphi\right]}{n+m}\right]_0^{2\pi} = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos n\varphi \cdot \cos m\varphi \ d\varphi = \frac{1}{2}\cdot \int_0^{2\pi} \left[\cos\left[(n-m)\varphi\right] + \cos\left[(n+m)\varphi)\right]\right] \ d\varphi = \frac{1}{2}\cdot \left[\frac{\sin\left[(n-m)\varphi\right]}{n-m} + \frac{\sin\left[(n+m)\varphi\right]}{n+m}\right]_0^{2\pi} = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin n\varphi \cdot \sin m\varphi \ d\varphi = \frac{1}{2}\cdot \int_0^{2\pi} \left[\cos\left[(n-m)\varphi\right] - \cos\left[(n+m)\varphi)\right]\right] \ d\varphi = \frac{1}{2}\cdot \left[\frac{\sin\left[(n-m)\varphi\right]}{n-m} - \frac{\sin\left[(n+m)\varphi\right]}{n+m}\right]_0^{2\pi} = 0$$

$$\mathbf{n = m} : \int_0^{2\pi} \sin^2 n\varphi \ d\varphi = \pi \overset{n\neq 0}{=} \int_0^{2\pi} \cos^2 n\varphi \ d\varphi \quad , \quad \int_0^{2\pi} \cos^2(0\cdot\varphi) \ d\varphi = 2\pi$$

$$\int_0^{2\pi} \sin n\varphi \cdot \cos n\varphi \ d\varphi = \frac{1}{2}\cdot \int_0^{2\pi} \sin(2n\varphi) \ d\varphi = 0$$

$$\langle 1, \cos n\varphi\rangle = \int_0^{2\pi} \cos n\varphi \ d\varphi = 0 = \int_0^{2\pi} \sin n\varphi \ d\varphi = \langle 1, \sin n\varphi\rangle$$

$$\langle 1, 1\rangle = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$$

und sehen dass die Funktionen tatsächlich orthogonal sind!

Aufgabe 03

a) Für den homogenen Fall

$$u_t - a^2 u_{xx} = 0 \ , \ u(l,t) = u(0,t) = 0 \ , \ u(x,0) = u_0(x)$$

ergibt sich

$$\dot{E} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt} \int_0^l u^2(x,t) \ dx = \frac{1}{2} \cdot \int_0^l \frac{d}{dt} u^2(x,t) \ dx = \int_0^l u(x,t) \cdot u_t(x,t) \ dx$$

$$= \int_0^l u(x,t) \cdot a^2 u_{xx}(x,t) \ dx = a^2 \cdot \int_0^l u(x,t) \cdot \frac{\partial}{\partial x} u_x(x,t) \ dx = a^2 \cdot \int_0^l \frac{\partial}{\partial x} \left(u(x,t) \cdot u_x(x,t) \right) \ dx - a^2 \cdot \int_0^l \left(u_x(x,t) \right)^2 \ dx$$

$$= a^2 \cdot u(x,t) u_x(x,t) \ |_0^l - a^2 \int_0^l u_x^2(x,t) \ dx = a^2 \cdot \underbrace{[u(l,t)u_x(l,t) - u(0,t)u_x(0,t)]}_{0} - a^2 \int_0^l \underbrace{u_x^2(x,t)}_{\geq 0} \ dx \leq 0 \quad \square$$

b) Seien $u_1, \ u_2$ Lösungen des Problems

$$u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t) \ , \ u(l,t) = b(t) \ , \ u(0,t) = a(t) \ , \ u(x,0) = u_0(x)$$

und $u := u_1 - u_2$. Dann ergibt sich für u das Problem

$$u_t - a^2 u_{xx} = 0 \ , \ u(0,t) = u(l,t) = 0, \ u(x,0) = 0$$

Doch aus Teil (a) folgt

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \int_0^l u^2(x,t) \ dx \leq 0$$

das heisst, E ist monoton fallend. Doch zum Zeitpunkt $t = 0$ ist

$$E(t=0) = \frac{1}{2} \int_0^l 0 \ dx = 0$$

Somit ist für alle $t > 0$ auch

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^l u^2(x,t) \ dx \leq 0 \ : \ \forall \ t > 0$$

Da der Integrant u^2 nicht negativ ist, muss er selbst 0 sein, also $u = 0$. Somit ist $u_1 \equiv u_2$. $\square$

Aufgabe 04

Ist die L-periodische Funktion $f(x)$ als Fourierreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ a_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{L} \right) + b_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{L} \right) \right\}$$

darstellbar, so ergeben sich die Fourierkoeffizienten als

$$n \neq 0 : a_n = \frac{2}{L} \cdot \int_0^L f(x) \cdot \sin\left(\frac{2\pi n x}{L} \right) \ dx$$

$$n \neq 0 : b_n = \frac{2}{L} \cdot \int_0^L f(x) \cdot \cos\left(\frac{2\pi n x}{L} \right) \ dx$$

$$n = 0 : b_0 = \frac{1}{L} \cdot \int_0^L f(x) \ dx \quad , \quad a_0 := 0$$

Alternativ, ist diese Funktion dann darstellbar als

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{i2\pi nx/L} \;,\; C_n \in \mathbb{C}$$

wobei jetzt die Koeffizienten C_n gegeben sind durch

$$C_n = \frac{1}{L} \cdot \int_0^L f(x) \cdot e^{-i2\pi nx/L} dx$$

Ist eine Funktion andernfalls nur in einem Intervall $[a, a+L]$ definiert, so kann man diese periodisch auf $\mathbb{R}$ fortsetzen und erhält die Koeffizienten nach der gleichen Regel. Dabei spiel es keine Rolle ob man in $[a, a+L]$ oder in $[0, L]$ integriert (siehe Übungsserie 11 - Aufgabe 03 Zwischenbeweis). Im folgenden ist $a = -\pi$ und $L = 2\pi$.

a) Da $f(x) = x^2$ gerade ist, besteht sie nur aus cos Funktionen, d.h $a_n = 0 \;\forall\; n$. Somit

$$b_0 = \frac{1}{L} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \; dx = \frac{\pi^2}{3}$$

$$b_n = \frac{2}{L} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) \; dx = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cdot \cos(nx) \; dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \left[\frac{x^2}{n}\sin(nx) + \frac{2x}{n^2}\cos(nx) - \frac{2}{n^3}\sin(nx)\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{4}{n^2} \cdot \cos(n\pi) = (-1)^n \cdot \frac{4}{n^2}$$

b) Analog ist auch hier $a_n = 0 \;\forall\; n$. Somit ergeben sich die Koeffizienten als

$$b_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} |x| \; dx = \frac{\pi}{2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cdot \cos(nx) \; dx = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} x\cos(nx) \; dx = \frac{2}{\pi} \cdot \left[\frac{x}{n}\sin(nx) + \frac{1}{n^2}\cos(nx)\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2} \cdot [\cos(n\pi) - 1]$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{4}{\pi n^2} & : n \text{ ungerade} \\ 0 & : n \text{ gerade} \end{cases}$$

c) Da die Funktion $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ ungerade ist, sind alle $b_n = 0$. Somit müssen nur die a_n bestimmt werden:

$$a_n = \frac{2}{L} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sgn}(x) \cdot \sin(nx) \; dx = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \sin(nx) \; dx = \frac{2}{n\pi} \cdot [1 - (-1)^n]$$

d) Die Funktion $f(x)$ ist hier allgemein weder ungerade noch gerade. Somit müssen beide Koeffizientenfolgen bestimmt werden.

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(nx)\ dx = \frac{1}{\pi} \cdot \left\{ \int_{-\pi}^{0} ax \cdot \sin(nx)\ dx + \int_{0}^{\pi} bx \cdot \sin(nx)\ dx \right\}$$

$$= \frac{a}{\pi} \cdot \left[\frac{1}{n^2} \sin(nx) - \frac{x}{n} \cos(nx) \right]_{-\pi}^{0} + \frac{b}{\pi} \cdot \left[\frac{1}{n^2} \sin(nx) - \frac{x}{n} \cos(nx) \right]_{0}^{\pi} = -\frac{(a+b)}{n} \cdot (-1)^n$$

$$b_0 = \frac{1}{L} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \left\{ \int_{-\pi}^{0} ax\ dx + \int_{0}^{a} bx\ dx \right\} = \frac{(a+b)\pi}{4}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(nx)\ dx = \frac{1}{\pi} \cdot \left\{ \int_{-\pi}^{0} ax \cdot \cos(nx)\ dx + \int_{0}^{\pi} bx \cdot \cos(nx)\ dx \right\}$$

$$= \frac{a}{\pi} \cdot \left[\frac{x}{n} \sin(nx)\ dx + \frac{1}{n^2} \cos(nx) \right]_{-\pi}^{0} + \frac{b}{\pi} \cdot \left[\frac{x}{n} \sin(nx)\ dx + \frac{1}{n^2} \cos(nx) \right]_{0}^{\pi}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2(a-b)}{\pi n^2} & : n \text{ ungerade} \\ 0 & : n \text{ gerade} \end{cases}$$

e) Wir verwenden zur Abwächslung mal die alternative Darstellung und legen los:

$$C_n = \frac{1}{4\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \left[e^{ax} + e^{-ax} \right] \cdot e^{-inx}\ dx = \frac{1}{4\pi} \cdot \left[\frac{e^{(a-in)x}}{a-in} - \frac{e^{-(a+in)x}}{a+in} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{a}{2\pi(a^2+n^2)} \cdot \left[e^{a\pi} - e^{-a\pi} \right] \cdot (-1)^n$$

$$= \frac{a \sinh(a\pi)}{\pi(a^2+n^2)} \cdot (-1)^n$$

f) Die Funktion $f(x) = |\sin x|$ ist gerade. Somit müssen nur die b_n bestimmt werden, und wir erhalten

$$b_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|\ dx = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{0}^{\pi} \sin x\ dx = \frac{2}{\pi}$$

$$n \neq 1 : b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| \cdot \cos(nx)\ dx = \frac{2}{\pi} \cdot \int_{0}^{\pi} \sin x \cdot \cos(nx)\ dx = \frac{1}{\pi} \cdot \left[\frac{1}{n-1} \cdot \cos\left[(n-1)x\right] - \frac{1}{n+1} \cdot \cos\left[(n+1)x\right] \right]_{0}^{\pi}$$

$$= -\frac{2}{\pi(n^2-1)} \cdot (1 + (-1)^n) \quad , \quad b_1 = 0$$

Aufgabe 05

a) Ist eine Funktion, entwickelbar als

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left[a_n \sin(\omega_n x) + b_n \cos(\omega_n x) \right]$$

gerade, so gilt $a_n = 0 \ \ \forall\ n$, da sich durch einfaches Einsetzen ergibt

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} 2a_n \sin(\omega_n x) \equiv 0$$

Analog, gilt für ungerade Funktionen $b_n = 0 \ \ \forall\ n$. Die Umkehrungen gelten offensichtlich auch, so dass man z.B eine Funktion $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ gerade fortsetzen kann, z.B rekursiv durch

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & : x \in [0, L] \\ f(-x) & : x \in [-L, 0] \\ \tilde{f}(x - 2L) & : x > L \\ \tilde{f}(-x) & : x < -L \end{cases}$$

um zu erreichen dass die $a_n = 0$ sind. Ähnlich kann man die Funktion ungerade fortsetzen, z.B rekursiv durch

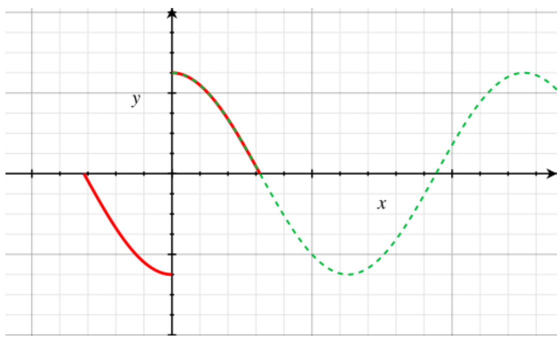
$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & : x \in [0, L] \\ -(f - x) & : x \in [-L, 0] \\ \tilde{f}(x - 2L) & : x > L \\ -\tilde{f}(-x) & : x < -L \end{cases}$$

um zu erreichen dass die $b_n = 0$ sind.
Bemerke: Die oben genannten Fortsetzungen können an den Wiederholungsgrenzen Unstetigkeiten aufweisen falls $f(0) \neq f(L)$ ist, was in der Regel zu sehr schlechtem Konvergenzverhalten der Fourierreihe führen wird. Durch eine entsprechende *Spiegelung* an den Grenzen kann dieses Problem behoben werden. Dabei verdoppelt sich allerdings das Periodizitätsintervall der Fortsetzung.

b) Die Funktion $f(x) = \cos(ax)$ kann z.B fortgesetzt werden durch die Grund-Funktion

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} \cos(ax) & : x \in \left[0, \frac{\pi}{2a}\right] \\ -\cos(ax) & : x \in \left[-\frac{\pi}{2a}, 0\right] \end{cases}$$

mit einem Periodizitätsintervall $\left[-\frac{\pi}{2a}, \frac{\pi}{2a}\right]$, gemäß der Abbildung

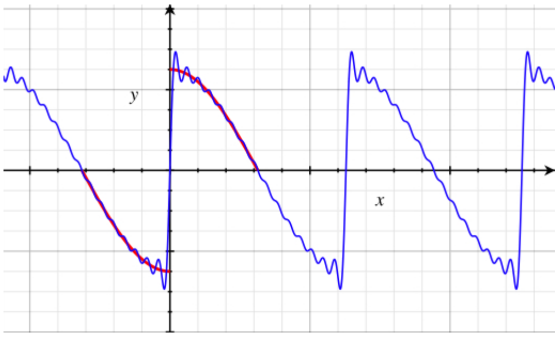


Durch eine einfache Probe zeigt sich dass die periodische Fortsetzung von $\tilde{f}$ in $[0, \pi]$ mit f identisch ist.
Somit ergibt sich $b_n = 0\ \forall\ n$ und

$$a_n = \frac{2}{L} \cdot \int_{-\pi/2a}^{\pi/2a} \tilde{f}(x) \cdot \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)\ dx = \frac{2a}{\pi} \cdot \int_{-2\pi/a}^{2\pi/a} \tilde{f}(x) \cdot \sin(2nax)\ dx = \frac{4a}{\pi} \cdot \int_0^{\pi/2a} \cos(ax) \cdot \sin(2nax)\ dx$$

$$= -\frac{2}{\pi} \cdot \left[\frac{1}{2n-1} \cdot \cos\left[(2n-1)\,ax\right] + \frac{1}{2n+1} \cdot \cos\left[(2n+1)\,ax\right]\right]_0^{\pi/2a} = \frac{2}{\pi} \cdot \left[\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1}\right]$$

Die ersten 15 Glieder der Reihe ergeben zum Beispiel schon eine sehr gute Approximation der Funktion, wie unten zu sehen ist.



Aufgabe 06

Wir beginnen mit der Definition

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

und schreiben

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle - \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle$$

$$= 2\,\langle x,x\rangle + 2\,\langle y,y\rangle = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) \quad \square$$

Aufgabe 07

Wir beginnen auch hier mit der Definition der Norm und schreiben

$$\left\|\sum_{i=1}^n x_i\right\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i,\ \sum_{j=1}^n x_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \left\langle x_i,\ \sum_{j=1}^n x_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \underbrace{\langle x_i, x_j\rangle}_{\langle x_i, x_i\rangle \cdot \delta_{ij}} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle x_i, x_i\rangle\, \delta_{ij} = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 \quad \square$$

Aufgabe 08

Methode der Greenschen Funktion: Wir beginnen mit der Greenschen Funktion $G(a,x)$ für die Halbebene V

$$G(a,x) = \frac{1}{2\pi}\left(\ln\|x-a\| - \ln\|x-\overline{a}\|\right)\ ,\ \overline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ -a_2 \end{pmatrix}$$

bzw. deren Normalableitung an ∂V

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{2a_2}{2\pi\,\|x-a\|^2}$$

und schreiben die Lösung auf als

$$u(\vec{r}) = \int_{\partial V} u(\vec{a}) \cdot \frac{\partial G}{\partial n}\, dA = \frac{y}{\pi} \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{t^2+1} \cdot \frac{1}{((x-t)^2+y^2)}\, dt$$

$$= \frac{y}{\pi} \cdot \left[\frac{-4xy\arctan(t) + 2x(x^2+y^2+1)\arctan\left(\frac{t-x}{y}\right) + y\left(x^2+y^2-1\right)\cdot\left[\ln\left(t^2+1\right) - \ln\left(x^2-2tx+y^2+t^2\right)\right]}{2y\left[x^4 + 2\left(y^2+1\right)x^2 + \left(y^2-1\right)^2\right]}\right]_{-\infty}^{\infty}$$

$$= \frac{-2xy + x^3 + xy^2 + x}{x^4 + 2x^2y^2 + 2x^2 + \left(y^2-1\right)^2} = \frac{x\left(x^2+y^2-2y+1\right)}{\left(x^2+y^2+1\right)^2 - 4y^2} = \frac{x\left(x^2+y^2-2y+1\right)}{\left(x^2+y^2-2y+1\right)\left(x^2+y^2+2y+1\right)} = \frac{x}{x^2+(y+1)^2}$$

Einsetzen zeigt dass u die Randbedingung und die Laplace-Gleichung erfüllt.

Separationsansatz: Wir machen den Ansatz

$$u(x,y) = \Phi(x) \cdot \Theta(y)$$

und erhalten die Gleichung

$$\Delta u(x,y) = \Phi''(x)\Theta(y) + \Theta''(y)\Phi(x) = 0 \ \rightarrow \ \frac{\Phi''(x)}{\Phi(x)} = -\frac{\Theta''(y)}{\Theta(y)} =: h : const$$

was den gewöhnlichen DGL

$$\Phi'' = h\Phi \ , \ \Theta'' = -h\Theta$$

entspricht. Deren allgemeine Lösungen sind gegeben durch

$$\mathbf{h \neq 0} : \Phi(x) = Ae^{\sqrt{h}x} + Be^{-\sqrt{h}x} \qquad \mathbf{h = 0} : \Phi(x) = A + Bx$$

$$\mathbf{h \neq 0} : \Theta(y) = Ce^{\sqrt{-h}y} + De^{-\sqrt{-h}y} \qquad \mathbf{h = 0} : \Theta(y) = C + Dy$$

Da die konstante h beliebig war, erhält man aufgrund der Linearität der PDG die allgemeine Lösung als Superposition der Fundamentallösungen:

$$u(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[A(h)e^{\sqrt{h}x} + B(h)e^{-\sqrt{h}x}\right] \cdot \left[C(h)e^{\sqrt{-h}y} + D(h)e^{-\sqrt{-h}y}\right] \ dh$$

Durch die Randbedingung

$$u(x,0) = \frac{x}{1+x^2}$$

erhält man

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[A(h)e^{\sqrt{h}x} + B(h)e^{-\sqrt{h}x}\right] \cdot \underbrace{[C(h) + D(h)]}_{P(h)} \ dh = \frac{x}{1+x^2}$$

Fordern wir die Stetigkeit von A, B, C und D so ergibt sich wegen $\lim\limits_{x\to\pm\infty} u(x,0) = 0$ dass $A(h)$ und $B(h)$ für $h > 0$ verschwinden müssen! Demnach erhält man

$$u(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{0} \left[A(h)e^{\sqrt{h}x} + B(h)e^{-\sqrt{h}x}\right] \cdot \left[C(h)e^{\sqrt{-h}y} + D(h)e^{-\sqrt{-h}y}\right] \ dh$$

und ferner

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \left[A(h)e^{\sqrt{h}x} + B(h)e^{-\sqrt{h}x}\right] \cdot P(h) \ dh = \int\limits_{-\infty}^{0} \left[A(h)e^{i\sqrt{-h}x} + B(h)e^{-i\sqrt{-h}x}\right] \cdot P(h) \ dh$$

$$\stackrel{*}{=} \int\limits_{0}^{\infty} 2\omega \left[A\left(-\omega^2\right)e^{i\omega x} + B\left(-\omega^2\right)e^{-i\omega x}\right] \ d\omega \cong \int\limits_{0}^{\infty} \left[\mathcal{W}(\omega)e^{i\omega x} + \mathcal{V}(-\omega)e^{-i\omega x}\right] \ d\omega$$

$$\cong \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}(\omega)e^{i\omega x} \ d\omega \stackrel{!}{=} \frac{x}{1+x^2}$$

$$\omega := \sqrt{-h} \ , \ \mathcal{W}(\omega) := 2\omega A(-\omega^2) \ , \ \mathcal{V}(-\omega) := 2\omega B(-\omega^2) \ \rightarrow \ \mathcal{V}(\omega) = -2\omega B\left(-\omega^2\right)$$

$$\mathcal{H}(\omega) \cong \begin{cases} \mathcal{W}(\omega) & : \omega > 0 \\ \mathcal{V}(\omega) & : \omega < 0 \end{cases}$$

$(*)$: o.B.d.A. $P(h) \equiv 1$

wobei sich $\mathcal{H}(\omega)$ ergibt als

$$\mathcal{H}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} \cdot e^{-i\omega x} \; dx$$

Somit ergibt sich die allgemeine Lösung von $u(x, y)$ als

$$u(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{0} \left[A(h)e^{\sqrt{h}x} + B(h)e^{-\sqrt{h}x}\right] \cdot \left[C(h)e^{\sqrt{-h}y} + D(h)e^{-\sqrt{-h}y}\right] \; dh$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\mathcal{H}(\sqrt{-h})}{2\sqrt{-h}} \cdot \left[e^{i\sqrt{-h}x} - e^{-i\sqrt{-h}x}\right] \cdot \left[C(h)e^{\sqrt{-h}y} + D(h)e^{-\sqrt{-h}y}\right] \; dh$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{i\mathcal{H}(\sqrt{-h})}{\sqrt{-h}} \cdot \sin\left(\sqrt{-h}x\right) \cdot \left[C(h)e^{\sqrt{-h}y} + D(h)e^{-\sqrt{-h}y}\right] \; dh$$

$$\cong 2i \int\limits_{0}^{\infty} \mathcal{H}(\omega) \cdot \sin(\omega x) \cdot \left[\mathcal{C}(\omega)e^{\omega y} + \mathcal{D}(\omega)e^{-\omega y}\right] \; d\omega$$

wobei die einzige Bedingung ist dass $\mathcal{C}(\omega) + \mathcal{D}(\omega) = 1 \; \forall \; \omega$ gilt.