Übungen zur Vorlesung Analysis III (WS 07/08)

14. Übungsserie

1. Lösen Sie das eindimensionale Cauchy-Problem für die Wärmeleitungsgleichung mit homogener Anfangsbedingung:

$$\begin{aligned} &u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t) \quad -\infty < x < \infty \qquad t > 0 \\ &u(x,0) = 0 \end{aligned}$$

Hinweis: $\quad u(x,t) = \int\limits_0^t w(x,t,\tau) \;$ mit $\quad \begin{aligned} &w_t - a^2 w_{xx} = 0 \\ &w|_{t=\tau} = f(x,\tau) \end{aligned}$

2. Beweisen Sie die Orthogonalitätsrelationen für das System $\{1, \cos n\varphi, \sin n\varphi\}_{n=1}^{\infty}$

3. Gegeben sei das Rand-Anfangswert-Problem für den endlichen Wärmeleiter

$$\begin{aligned} u_t - a^2 u_{xx} &= f(t,x) \\ u(0,t) &= a(t) \\ u(l,t) &= b(t) \\ u(x,t)\big|_{t=0} &= u_0(x) \ . \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass $\frac{dE}{dt} \leq 0$ für $E(t) = \frac{1}{2} \int\limits_0^l u^2(x,t)dx$, wenn $f = a = b = 0$.

b) Schließen Sie daraus, dass obiges Problem höchstens eine Lösung hat.

4. Bestimmen Sie die Fourierkoffizienten der folgenden Funktionen in $[-\pi, \pi]$

a)* $f(x) = x^2$

b)* $f(x) = |x|$

c) $f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} ax & -\pi < x \leq 0 \\ bx & 0 \leq x < \pi \end{cases}$

e) $f(x) = \cosh ax$

f)* $f(x) = |\sin x|$

5.* a) Die folgenden Funktionen seien nur im Intervall $[0, \pi]$ gegeben. Wodurch kann erreicht werden, dass die resultierenden Fourier-Reihen nur die Sinus- bzw. Cosinusfunktionen enthalten?

b) Führen Sie das Programm mit $f(x) = \cos ax (a \notin \mathbb{Z})$ durch, wenn nur Sinusfunktionen erwartet werden.

6.* Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in H$ (Hilbertraum)

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \;\text{ gilt.}$$

7. Seien $x_1, \ldots, x_n \in H$ (Hilbertraum) mit $\langle x_i, x_k \rangle = 0 \quad$ für $i \neq k$.
Dann gilt

$$\|x_1 + x_2 + \ldots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \ldots + \|x_n\|^2 \ .$$

8. Sonderaufgabe für Matrikel-Nr. 89747 und andere Fans:
Lösen Sie das Dirichlet'sche Problem für die Halbebene $H = \{(x,y), \ \ (x,y) \in I\!R^2 \ , \ \ y > 0\}$ mit $u(x,0) = \frac{x}{x^2+1}$.

Es wird empfohlen, alle mit * gekennzeichneten Aufgaben schriftlich zu bearbeiten und in den Übungen in der Woche vom 04.02. bis 08.02.2008 abzugeben.