Analysis III
FSU Jena - WS 07/08
Serie 13 - Lösungen

Stilianos Louca

2. März 2008

Aufgabe 01

Seien u_1 und u_2 Lösungen des Problems, und $u = u_1 - u_2$. Dann gilt

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0,\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0$$

Durch die allgemeine Lösung

$$u(x,t) = \varphi_1(x+ct) + \varphi_2(x-ct)$$

dieser Differentialgleichung, erhält man durch einsetzen der Randbedingungen

$$u(x,0) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) = 0$$

$$u_t(x,0) = c\varphi_1'(x) - c\varphi_2'(x) = 0 \ \rightarrow\ \varphi_1(x) - \varphi_2(x) = \int 0\ dx = 2C : const$$

$$\rightarrow\ \varphi_1(x) = C,\ \varphi_2(x) = -C \ \rightarrow\ u(x,t) = C - C = 0$$

und somit $u_1 = u_2$. $\square$

Aufgabe 02

Wäre die Lösung für $x \in \mathbb{R}$ gesucht, so ergäbe sich die D'Alembert Lösung gemäß

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \cdot \int\limits_{x-t}^{x+t} \psi(\tau)\ d\tau$$

Hinsichtlich auf die erwartete Lösung die sich aus rein physikalischen Überlegungen ergibt, werden wir versuchen die Rand- bzw. Anfangsbedingungen so fortzusetzen dass sich eine Reflektion am *freien* Ende ergibt. In unserem Fall ist es egal ob $\psi(x)$ differenzierbar ist, sie kann sogar unstetig sein, Hauptsache sie ist $\mathcal{R}$-Integrierbar. Somit werden wir ψ zu $\tilde{\psi}$ auch auf negative x fortsetzen, gemäß

$$\tilde{\psi}(x) := \psi(|x|)$$

Somit ergibt sich dann die Lösung des Problems

$$u_{tt} - u_{xx} = 0,\quad u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = \psi(x),\ x,t > 0$$

als

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \cdot \int\limits_{x-t}^{x+t} \tilde{\psi}(\tau)\ d\tau = \begin{cases} \displaystyle\int_{x-t}^{x+t} \psi(\tau)\ d\tau & : x > t \\ \displaystyle\int_0^{t-x} \psi(\tau)\ d\tau + \int_0^{x+t} \psi(\tau)\ d\tau & : x \leq t \end{cases}$$

Durch Einsetzen zeigt sich dass diese für $x > 0$ tatsächlich Lösung des Problems ist:

$$u(x,0) = \frac{1}{2}\int_x^x \tilde{\psi}(\tau)\ d\tau = 0$$

$$u_t(x,0) = \frac{1}{2}\cdot\left[\tilde{\psi}(x) + \tilde{\psi}(x)\right] = \psi(x)$$

$$u_t = \frac{1}{2}\cdot\left[\tilde{\psi}(x+t) + \tilde{\psi}(x-t)\right],\ u_x = \frac{1}{2}\cdot\left[\tilde{\psi}(x+t) - \tilde{\psi}(x-t)\right]$$

$$u_{tt} = \frac{1}{2}\cdot\left[\psi'(|x+t|) - \psi'(|x-t|)\cdot\operatorname{sgn}(x-t)\right],\ u_{xx} = \frac{1}{2}\cdot\left[\psi'(|x+t|) - \psi'(|x-t|)\cdot\operatorname{sgn}(x-t)\right]$$

$$\rightarrow\ u_{tt} - u_{xx} = 0$$

a) Wir setzen wie oben beschrieben

$$\tilde{\psi}(x) := \psi(|x|) = \sin|x|$$

und schreiben die Lösung als

$$u(x,t) = \int_{x-t}^{x+t} \sin|\tau|\ d\tau = \begin{cases} 2\sin x\cdot\sin t & : x > t \\ 2 - 2\cos x\cdot\cos t & : x < t \end{cases}$$

Bemerkung: Wir deuten die Funktion $u(x,t)$ als die Wellenfunktion eines Seiles. Die *Verschiebung* des Gleichgewichtpunktes resultiert aus dem vorhandenen *Start-Schubs* am freien Ende, der das gesamte Seil stückweise nach oben schubst.

b) Analog ergibt sich auch hier die Lösung als

$$u(x,t) = \int_{x-t}^{x+t} \cos|\tau|\ d\tau = 2\cos x\cdot\sin t$$

Hier waren die Anfangsbedingungen genau so, dass das Seil den Gleichgewichtspunkt bei $u = 0$ hat.

Aufgabe 03

a) Wir machen den Ansatz

$$u(\vec{r},t) = T(t)\cdot v(\vec{r})$$

und gehen damit in die Differentialgleichung ein:

$$0 = u_t t - c^2\Delta u = T''(t)\cdot v(\vec{r}) - c^2 T(t)\cdot\Delta v(\vec{r})$$

$$\rightarrow\ \frac{T''}{c^2 T} = \frac{\Delta v}{v} \overset{*}{=}: -\lambda$$

(*) : Da linke und rechte Seite unabhängig sind!
Umgestellt erhält man also:

$$T'' + \lambda c^2 T = 0\quad,\quad \Delta v + \lambda v = 0\quad \square$$

b) Wir fordern $v(\vec{r}) = v(r)$, machen den Ansatz

$$v(r) = \frac{R(r)}{r}$$

und legen los:

$$v' = \frac{R'}{r} - \frac{R}{r^2} \ , \quad v'' = \frac{R''}{r} - \frac{2R'}{r^2} + \frac{2R}{r^3}$$

$$0 = \Delta v + \lambda v = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial v}{\partial r}\right) + \lambda v = \frac{2v'}{r} + v'' + \lambda v = \frac{R''}{r} + \frac{\lambda R}{r} \ \rightarrow \ R'' + \lambda R = 0$$

$$\rightarrow \ \lambda \neq 0 : R(r) = Ae^{r\sqrt{-\lambda}} + Be^{-r\sqrt{-\lambda}}, \ A, B \in \mathbb{R} \ , \quad \lambda = 0 : R = A + Br$$

Im Fall $\lambda > 0$ also:

$$R(r) = C\cos\left(r\sqrt{\lambda}\right) + D\sin\left(r\sqrt{\lambda}\right)$$

und für $\lambda < 0$ entsprechend:

$$R(r) = C\cosh(\left(r\sqrt{\lambda}\right) + D\sinh\left(r\sqrt{\lambda}\right)$$

Aufgabe 04

Wir lösen zuerst das Problem

$$h_{tt} - c^2 h_{xx} = 0, \ h(x,0) = \varphi(x) = \sin x, \ h_t(x,0) = \psi(x) = 0$$

und erhalten die D' Alembert Lösung

$$h(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} \psi(\tau)\ d\tau = \frac{1}{2}\left[\sin(x+ct) + \sin(x-ct)\right] + \frac{1}{2}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} 0\ d\tau = \sin x \cdot \cos(ct)$$

Als nächstes Lösen wir das Problem

$$v_{tt} - c^2 v_{xx} = f(x,t) = \sin\omega x \ , \ v(x,0) = 0, \ v_t(x,0) = 0$$

und erhalten gemäß Übungsserie 11 - Aufgabe 04 die Lösung

$$v(x,t) = \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(\sigma,\tau)\ d\sigma\ d\tau = \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} \sin(\omega\sigma)\ d\sigma\ d\tau$$

$$= \frac{1}{c\omega}\sin\omega x \cdot \int\limits_0^t \sin\left[\omega c(t-\tau)\right]\ d\tau = \frac{1}{c^2\omega^2}\sin\omega x \cdot (1 - \cos(\omega ct))$$

Die gesamte Lösung des ursprünglichen Problems ergibt sich aus der Summe der beiden Teillösungen:

$$\boxed{u(x,t) = \sin x \cdot \cos(ct) + \frac{1}{c^2\omega^2}\sin\omega x \cdot (1 - \cos(\omega ct))}$$

Aufgabe 05

a) Wir beginnen mit

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{t^{2k}}{(2k)!}\Delta^k\varphi(x)+\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}\Delta^k\psi(x)\right]\ ,\ \Delta^k=\underbrace{\Delta\Delta...\Delta}_{\times k}\cong\sum_{i_1\dots i_n}^{n}\frac{\partial^{2k}}{\partial x_{i_1}^2..\partial x_{i_k}^2}$$

gehen damit in die Differentialgleichung ein

$$u_t=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{2kt^{2k-1}}{(2k)!}\Delta^k\varphi(x)+\frac{(2k+1)t^{2k}}{(2k+1)!}\Delta^k\psi(x)\right]=\psi(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{t^{2k-1}}{(2k-1)!}\Delta^k\varphi(x)+\frac{t^{2k}}{(2k)!}\Delta^k\psi(x)\right]$$

$$u_{tt}=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{t^{2k-2}}{(2k-2)!}\Delta^k\varphi(x)+\frac{t^{(2k-1)}}{(2k-1)!}\Delta^k\psi(x)\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{t^{2k}}{(2k)!}\Delta^{k+1}\varphi(x)+\frac{t^{(2k+1)}}{(2k+1)!}\Delta^{k+1}\psi(x)\right]$$

$$u_{xx}=\Delta u=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{t^{2k}}{(2k)!}\Delta^{k+1}\varphi(x)+\frac{t^{(2k+1)}}{(2k+1)!}\Delta^{k+1}\psi(x)\right]$$

$$\rightarrow\ u_{tt}-u_{xx}=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{t^{2k}}{(2k)!}\Delta^{k+1}\varphi(x)+\frac{t^{(2k+1)}}{(2k+1)!}\Delta^{k+1}\psi(x)-\frac{t^{2k}}{(2k)!}\Delta^{k+1}\varphi(x)-\frac{t^{(2k+1)}}{(2k+1)!}\Delta^{k+1}\psi(x)\right]=0$$

$$u(x,0)=\varphi^{(0)}(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{0^{2k}}{(2k)!}\Delta^k\varphi(x)+\frac{0^{2k+1}}{(2k+1)!}\Delta^k\psi(x)\right]=\varphi(x)$$

$$u_{tt}(x,0)=\psi(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{0^{2k-1}}{(2k-1)!}\Delta^k\varphi(x)+\frac{0^{2k}}{(2k)!}\Delta^k\psi(x)\right]=\psi(x)$$

und sehen dass u tatsächlich Lösung ist.

b) Wir rechnen den k-ten Laplace Operator aus:

$$\varphi(x)=e^{x_1}\cos x_2\ :\ \Delta^k\varphi(x)\overset{k\geqq1}{\equiv}\Delta^{k-1}\left(\Delta e^{x_1}\cos x_1\right)=\Delta^{k-1}\underbrace{\left(e^{x_1}\cos x_2-e^{x}\cos x_2\right)}_{0}=0$$

$$\psi(x)=x_1^2-x_2^2\ :\ \Delta^k\psi(x)\overset{k\geqq1}{\equiv}\Delta^{k-1}\underbrace{\left[\Delta\left(x_1^2-x_2^2\right)\right]}_{0}=0$$

und schreiben sofort die Lösung auf:

$$u(x,t)=\varphi(x)+t\psi(x)=e^{x_1}\cos x_2+t\left(x_1^2-x_2^2\right)$$

c) Analog fahren wir auch hier fort:

$$\varphi(x)=x_1^2+x_2^2\ :\ \Delta\varphi(x)=4,\quad\Delta^k\varphi(x)\overset{k\geqq2}{\equiv}\Delta^{k-2}\underbrace{\Delta\Delta\varphi(x)}_{0}=0$$

$$\psi(x)=1\ :\ \Delta^k\psi(x)\overset{k\geqq1}{\equiv}\Delta^{k-1}\underbrace{\Delta\psi(x)}_{0}=0$$

und schreiben die Lösung auf, gemäß

$$u(x,t)=\varphi(x)+t\psi(x)+\frac{t^2}{2}\Delta\varphi(x)=x_1^2+x_2^2+t+2t^2$$