Übungen zur Vorlesung Analysis III (WS 07/08)

13. Übungsserie

1. Beweisen Sie die Eindeutigkeit der Lösung des folgenden Problems

$$\begin{array}{ll} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t) & x \in I\!R^1 \ , \quad t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x)\,, & u_t(x,0) = \psi(x) \end{array}$$

Hinweis: Verwenden Sie die Grundstruktur der allgemeinen Lösung von $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$.

2. Lösen sie das Rand-Anfangswert-Problem

$$\begin{array}{ll} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{für } x, t > 0 \\ u(x,0) = 0\,, & u_t(x,0) = \psi(x) \quad x > 0\,, \end{array}$$

wenn

a) $\psi(x) = \sin x$

b) $\psi(x) = \cos x$

(vgl. 12. Übungsserie Aufgabe 1)

3. Die Separation der Variablen lässt sich auch für die Wellengleichung

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 \quad \text{nutzen.}$$

a) Zeigen Sie, dass der Ansatz $u(\vec{x},t) = T(t) \cdot v(\vec{x}) \quad t > 0\,, \quad \vec{x} \in I\!R^3$ zu den Gleichungen

1) $T'' + c^2 \lambda T = 0$

2) $\Delta v + \lambda v = 0 \quad (\lambda \in I\!R)$

führt.

b) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung 2 (Helmhholtz-Gleichung), die nur von r abhängen.

Hinweis: Ansatz $V(\vec{x}) = \dfrac{R(r)}{r} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

4.* Lösen Sie

$$\begin{array}{ll} u_{tt} - c^2 u_{xx} = \sin \omega x & x \in I\!R\,, \quad t > 0 \\ u(x,0) = \sin x\,, & u_t(x,0) = 0 \end{array}$$

5.* Zeigen Sie, dass

a) $u(x,t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{t^{2k}}{(2k)!} \Delta^k \varphi(x) + \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \Delta^k \psi(x) \right]$
im Konvergenzfall das Cauchy-Problem für die Wellengleichung

$$\begin{array}{ll} u_{tt} - u_{xx} = 0 & u(x,0) = \varphi(x) \\ & u_t(x,0) = \psi(x) \quad \text{löst.} \end{array}$$

b) Lösen Sie obiges Problem für $x \in I\!R^2$ mit

1) $u(x,0) = u(x_1, x_2, 0) = e^{x_1} \cos x_2$
$u_t(x,0) = x_1^2 - x_2^2$

2) $u(x,0) = x_1^2 + x_2^2\,, \quad u_t(x,0) = 1$

Es wird empfohlen, alle mit * gekennzeichneten Aufgaben schriftlich zu bearbeiten und in den Übungen in der Woche vom 28.01. bis 02.02.2008 abzugeben.