Analysis III
FSU Jena - WS 07/08
Serie 12 - Lösungen

Stilianos Louca

2. März 2008

Aufgabe 01

Die allgemeine Lösung der PDG
$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$
lautet
$$u(x,t) = \Phi_1(x-ct) + \Phi_2(x+ct)$$
Wir gehen damit in das AWP ein:
$$x > 0 : u(x,0) = \varphi(x) \;\; \rightarrow \;\; \Phi_1(x) + \Phi_2(x) = \varphi(x) \;\; (\mathbf{A})$$
$$x > 0 : u_t(x,0) = \psi(x) \;\; \rightarrow \;\; -c\Phi_1(x) + c\Phi_2(x) = \psi(x) \;\; \rightarrow \;\; \Phi_2(x) - \Phi_1(x) = \frac{1}{c} \cdot \int_{x_0}^{x} \psi(\tau)\; d\tau \;\; (\mathbf{B})$$
$$t > 0 : u(0,t) = 0 \;\; \rightarrow \;\; \Phi_1(-ct) + \Phi_2(ct) = 0 \;\; \rightarrow \;\; x > 0 : \Phi_1(-x) + \Phi_2(x) = 0 \;\; (\mathbf{C})$$
Wir addieren (A) und (B) und bekommen sofort
$$x > 0 : \Phi_2(x) = \frac{\varphi(x)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x_0}^{x} \psi(\tau)\; d\tau \;\; (\mathbf{D})$$
Eingesetzt in (C) ergibt
$$x > 0 : \Phi_1(-x) = -\Phi_2(x) = -\frac{\varphi(x)}{2} - \frac{1}{2c} \int_{x_0}^{x} \psi(\tau)\; d\tau$$
$$\rightarrow \;\; x < 0 : \Phi_1(x) = -\frac{\varphi(-x)}{2} - \frac{1}{2c} \int_{x_0}^{-x} \psi(\tau)\; d\tau = -\frac{\varphi(-x)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{-x}^{x_0} \psi(\tau)\; d\tau$$
Aus (B) und (D) bekommt man ferner
$$x > 0 : \Phi_1(x) = \frac{\varphi(x)}{2} - \frac{1}{2c} \cdot \int_{x_0}^{x} \psi(\tau)\; d\tau = \frac{\varphi(x)}{2} + \frac{1}{2c} \cdot \int_{x}^{x_0} \psi(\tau)\; d\tau$$
also zusammengefast für Φ_1:
$$\Phi_1(x) = \frac{1}{2c} \cdot \int_{|x|}^{x_0} \psi(\tau)\; d\tau + \operatorname{sgn}(x) \cdot \frac{\varphi(|x|)}{2}$$
und schließlich die Lösung
$$x > 0, t > 0 : u(x,t) = \Phi_1(x-ct) + \Phi_2(x+ct) = \frac{\varphi(x+ct)}{2} + \operatorname{sgn}(x-ct) \cdot \frac{\varphi(|x-ct|)}{2} + \frac{1}{2c} \cdot \int\limits_{|x-ct|}^{x+ct} \psi(\tau)\; d\tau$$
Durch einsetzen in die DGL zeigt sich dass obere tatsächlich Lösung des AWP ist!

Aufgabe 02

Seien $u_1,\ u_2$ zwei Lösungen des Neumann-Problems

$$\Delta u = -\mu \ \ : x \in A^o, \ \ \frac{\partial u}{\partial n} = f(x) \ \ : x \in \partial A$$

Wir definieren die neue Funktion $u := u_2 - u_1$ für die gilt

$$\Delta u = \Delta u_1 - \Delta u_2 = 0 : x \in A^o, \ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u_1}{\partial n} - \frac{\partial u_2}{\partial n} = f(x) - f(x) = 0 : x \in \partial A$$

Wir verwenden die 1e Greensche Formel und bekommen

$$0 = \int_{\partial A} u(x) \underbrace{\frac{\partial u(x)}{\partial n}}_{0} \ df = \int_A \left(u(x) \underbrace{\Delta u(x)}_{0} + \operatorname{grad} u(x) \cdot \operatorname{grad} u(x) \right) \ dV = \int_A \underbrace{|\operatorname{grad} u(x)|^2}_{\geq 0} dV$$

$$\operatorname{grad} u \ \textit{stetig} \ \rightarrow \ \operatorname{grad} u(x) = 0 \ \rightarrow \ u(x) : \textit{const} \ \rightarrow \ u_1 = u_2 + \textit{const} \quad \square$$

Aufgabe 03

Wir beginnen mit $\Delta u = -\mu, \ \frac{\partial u}{\partial n} |_{\partial A} = f(x)$ und schreiben

$$\int_A \mu(x) \ dV = -\int_A \Delta u \ dV = -\int_A \operatorname{div} \operatorname{grad} u \ dV = -\int_{\partial A} \operatorname{grad} u \cdot d\vec{f} = -\int_{\partial A} \frac{\partial u}{\partial n} \ df = -\int_{\partial A} f(x) \ df$$

$$\rightarrow \int_{\partial A} f(x) \ df = -\int_A \mu(x) \ dV$$

Aufgabe 04

a) Da u in A^o harmonisch ist, erfüllt sie die Mittelwerteigenschaft:

$$u(0) = \frac{1}{\omega_n} \cdot \int_{\partial A} u(x) \ ds = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\sin \varphi}{1 + \cos^2 \varphi} \ d\varphi = \frac{1}{2\pi} \cdot [-\arctan(\cos(\varphi))]_0^{2\pi} = 0$$

b) Da u auf clA stetig und in A^o harmonisch ist, befindet sich das Maximum bzw. Minimum der Funktion auf dem Rand ∂A. Somit ist also

$$\max_{\vec{r} \in A} u(\vec{r}) = \max_{\vec{r} \in \partial A} u(\vec{r}) = \max_{-1 \leq y \leq 1} \frac{y}{2 - y^2} = 1$$

$$\min_{\vec{r} \in A} u(\vec{r}) = \min_{-1 \leq y \leq 1} \frac{y}{2 - y^2} = -1$$

Aufgabe 05

Wir beginnen mit der Greenschen Funktion des Halbraumes ∂V

$$g(a, x) = N_a(x) - N_{\overline{a}}(x) \ , \ \overline{a} := \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ -a_n \end{pmatrix}$$

wobei $N_a(x)$ das Newton-Potential sei, und berechnen deren Normalenableitung am Rand ∂V

$$\frac{\partial g(a,x)}{\partial n_x} \mid_{x_n=0} = -\operatorname{grad}_x g(a,x) \cdot \vec{e}_n \mid_{x_n=0} = -\frac{1}{\omega_n} \cdot \left[\frac{(x-a)}{\|x-a\|^n} - \frac{(x-\overline{a})}{\|x-\overline{a}\|^n} \right] \cdot \vec{e}_n \mid_{x_n=0}$$

$$= -\frac{1}{\omega_n} \cdot \left[\frac{(x_n-a_n)}{\|x-a\|^n} - \frac{(x_n+a_n)}{\|x-\overline{a}\|^n} \right] \mid_{x_n=0} = \frac{2a_n}{\omega_n \|x-a\|^n}$$

Mit der Darstellungsformel bekommt man so

$$u(a) = \int_{\partial V} \underbrace{u(x)}_{f(x)} \frac{\partial g(a,x)}{\partial n}\, dA_x + \int_V g(a,x) \underbrace{\Delta u(x)}_{0}\, dV = \frac{2a_n}{\omega_n} \cdot \int_{\partial V} \frac{f(x)}{\|x-a\|^n}\, dA_x$$

Aufgabe 06

Wir beginnen mit einer Lösung für das Problem

$$\varphi(x) = \psi(x) = 0 \;\rightarrow\; u = 0$$

Wir zeigen dass

$$u_n = \frac{1}{n^2} \sin(nx) \sinh(ny)$$

eine Lösung für

$$\varphi_n(x) = 0,\; \psi_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx)$$

ist:

$$\Delta u_n = \left(\frac{\partial^2}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial y} \right) u_n = \frac{1}{n^2} \left(-n^2 \sin(nx) \sinh(ny) + n^2 \sin(nx) \sinh(ny) \right) = 0$$

$$u_n(x,0) = \frac{1}{n^2} \sin(0) \sinh(ny) = 0 = \varphi_n(x)$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial y}(x,0) = \frac{1}{n} \sin(nx) \underbrace{\cosh(0)}_{1} = \psi_n(x)$$

Schließlich betrachten wir den Grenzwert $n \to \infty$ und sehen das zwar die Randbedingungen zu den vorigen gleichmäßig konvergieren

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = 0,\; \lim_{n\to\infty} \max_{x\in\mathbb{R}} |\psi_n(x) - 0| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \;\rightarrow\; \lim_{n\to\infty} \psi_n = 0$$

jedoch die Lösungen u_n nicht gleichmäßig zu 0 konvergieren:

$$\lim_{n\to\infty} \max_{\vec{r}\in A^o} |u_n - 0| = \lim_{n\to\infty} \max_{\vec{r}\in A^o} \left| \frac{\sinh(ny)}{n^2} \right| = \infty$$

Somit ist die Aufgabe nicht korrekt gestellt.