Übungen zur Vorlesung Analysis III (WS 07/08)

12. Übungsserie

1.* Lösen Sie das Cauchy-Problem für die Wellengleichung auf der Halbgeraden, d.h.

$$\begin{array}{ll} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{für } x > 0,\ t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x)\,, & u_t(x,0) = \psi(x) \quad 0 < x < \infty \\ u(0,t) = 0\,, & \text{wobei } \varphi(0) = \psi(0) = 0 \end{array}$$

2. Die Aufgabe:

$$\begin{array}{l} \Delta u = 0 \quad \text{in } \overset{\circ}{A} \\ \frac{\partial u}{\partial n} = f(x) \quad \text{für } x \in \partial A \end{array}$$

wobei ∂A eine Fläche mit stetiger äußerer Normale ist, heißt inneres Neumannsches Problem. Zeigen Sie, dass sich 2 Lösungen höchstens durch eine additive Konstante unterscheiden können

3. Das Neumannsche Problem

$$\begin{array}{l} \Delta u = -\mu \quad \text{in } \overset{\circ}{A} \\ \frac{\partial u}{\partial n} = f(x) \quad \text{für } x \in \partial A \end{array}$$

ist nur unter Zusatzbedingungen an μ und f lösbar. Finden Sie diese!

4.* Es sei u harmonisch in der Kreisscheibe $\overset{\circ}{A} = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}$ stetig auf $cl\, A$ und $u(x,y) = \frac{y}{1+x^2}$ auf ∂A.

a) Berechnen Sie $u(0,0)$

b) Bestimmen Sie $\max\{u(x,y) : (x,y) \in cl\, A\}$ und $\min\{u(x,y) : (x,y) \in cl\, A\}$!

5. In der Vorlesung wurde die Greensche Funktion g für die Halbebene ($n = 2$) und den Halbraum ($n \geq 3$) bestimmt.
Leiten Sie daraus durch Berechnung von $\frac{\partial g}{\partial n}$ eine Integraldarstellung (Poisson'sche Integralformel) der Lösung des Dirichlet-Problems

$$\begin{array}{l} \Delta u = 0 \ \text{ in } \overset{\circ}{H} = \{(x_1, \cdots, x_n)\,, \quad x_n > 0\} \\ u(x) = f(x) \ \text{ für } x = (x_1, \cdots, x_{n-1}, 0) \end{array}$$

ab.

6. Verifizieren Sie an folgendem Beispiel, dass die Aufgabe

$$\begin{array}{ll} \Delta u = 0 \ \text{ in } \overset{\circ}{A} = \mathbb{R} \times (0,\infty) & \\ u(x,0) = \varphi(x) & \\ u_y(x,0) = \psi(x) & \text{auf } \mathbb{R} \times \{0\} \end{array}$$

nicht korrekt gestellt ist.
Hinweise:

- Geben Sie zunächst die Lösung für $\varphi(x) = \psi(x) = 0$ an.
- Zeigen Sie, dass $u_n = \frac{1}{n^2} \sin(nx) \sinh(ny)$ eine Lösung für $\varphi_n(x) = 0,\ \psi_n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx)$ ist.
- Vergleichen Sie die Grenzprozesse $n \to \infty$.

Es wird empfohlen, alle mit * gekennzeichneten Aufgaben schriftlich zu bearbeiten und in den Übungen in der Woche vom 21.01. bis 25.01.2008 abzugeben.