Analysis III
FSU Jena - WS 07/08
Serie 11 - Lösungen

Stilianos Louca

2. März 2008

Aufgabe 01

Hilfssatz: Ist u eine harmonische Funktion auf der Kugel

$$B_R(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq R\} =: V$$

so gilt:

$$u(x_0) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \cdot \int_{\partial B_R(x_0)} u(x)\ dA$$

Beweis: Es gilt

$$x \in \partial B_R(x_0) : N_{x_0}(x) =: N_r : const \quad \wedge \quad \frac{\partial N_{x_0}(x)}{\partial n} = \frac{R^2 - \|x_0\|^2}{\omega_n R \|x - x_0\|^n}$$

wobei $N_a(x)$ das Newton-Potential sei. Somit folgt aus der Darstellungsformel

$$u(x_0) = \int\limits_{\partial B_R(x_0)} \left(u(x) \frac{\partial N_{x_0}(x)}{\partial n} - N_{x_0}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial n} \right)\ dA = \int\limits_{\partial B_R(x_0)} u(x) \cdot \frac{(x - x_0)}{\omega_n \|x - x_0\|^n}\ dA - N_r \cdot \int\limits_{\partial B_R(x_0)} \operatorname{grad} u(x)\ d\vec{A}$$

$$= \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \cdot \int\limits_{\partial B_R(x_0)} \frac{(x - x_0)}{\|x - x_0\|} \cdot u(x)\ dA - N_r \cdot \int\limits_{B_R(x_0)} \underbrace{\Delta u(x)}_{0}\ dV = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \cdot \int\limits_{\partial B_R(x_0)} u(x)\ dA \quad \square$$

a) Wir beginnen mit dem Satz über die Poissongleichung und schreiben

$$u(a) = \int_{\partial V} u(x) \frac{\partial g(a, x)}{\partial n}\ dA + \int_V g(a, x) \underbrace{\Delta u(x)}_{0}\ dV = \int_{\partial V} u(x) \cdot \frac{\left(R^2 - \|a\|^2\right)}{R\omega_n \|x - a\|^n}\ dA$$

$$= \frac{\left(R^2 - \|a\|^2\right)}{R\omega_n} \cdot \int_{\partial V} \frac{u(x)}{\|x - a\|^n}\ dA$$

wobei $g(a, x)$ die Greensche Funktion für $B_R(0)$ sei. Wir schätzen ab

$$\|x\| - \|a\| \leq \|x - a\| \leq \|x\| + \|a\|$$

Da u nicht negativ ist, ist auch der gesamte Integrant nicht negativ, und somit können wir abschätzen

$$\frac{u(x)}{(\|x\| + \|a\|)^n} \leq \frac{u(x)}{\|x - a\|^n} \leq \frac{u(x)}{(\|x\| - \|a\|)^n}$$

und schreiben

$$\frac{\left(R^2 - \|a\|^2\right)}{R\omega_n} \cdot \int_{\partial V} \frac{u(x)}{(\|x\| + \|a\|)^n} \; dA \leq u(a) \leq \frac{\left(R^2 - \|a\|^2\right)}{R\omega_n} \cdot \int_{\partial V} \frac{u(x)}{(\|x\| - \|a\|)^n} \; dA$$

$$\rightarrow \quad \frac{\left(R^2 - \|a\|^2\right)}{R\omega_n \left(R + \|a\|\right)^n} \cdot \int_{\partial V} u(x) \; dA \leq u(a) \leq \frac{\left(R^2 - \|a\|^2\right)}{R\omega_n \left(R - \|a\|\right)^n} \cdot \int_{\partial V} u(x) \; dA$$

$$\rightarrow \quad \frac{(R - \|a\|)}{R\omega_n \left(R + \|a\|\right)^{n-1}} \cdot \omega_n R^{n-1} u(0) \leq u(a) \leq \frac{(R + \|a\|)}{R\omega_n \left(R - \|a\|\right)^{n-1}} \cdot \omega_n R^{n-1} u(0)$$

$$\rightarrow \quad \frac{\left(1 - \frac{\|a\|}{R}\right)}{\left(1 + \frac{\|a\|}{R}\right)^{n-1}} \cdot u(0) \leq u(a) \leq \frac{\left(1 + \frac{\|a\|}{R}\right)}{\left(1 - \frac{\|a\|}{R}\right)^{n-1}} \cdot u(0) \quad \square$$

b) Sei $\Delta u = 0$ und $u \geq 0$ auf $\mathbb{R}^n$, das heisst $\forall \; R > 0$ ist $u \geq 0$ in B_R, und somit

$$\frac{\left(1 - \frac{\|a\|}{R}\right)}{\left(1 + \frac{\|a\|}{R}\right)^{n-1}} \cdot u(0) \leq u(a) \leq \frac{\left(1 + \frac{\|a\|}{R}\right)}{\left(1 - \frac{\|a\|}{R}\right)^{n-1}} \cdot u(0) \quad \forall \; R > 0$$

$$\rightarrow \quad u(0) = \lim_{R \to \infty} \frac{\left(1 - \frac{\|a\|}{R}\right)}{\left(1 + \frac{\|a\|}{R}\right)^{n-1}} \cdot u(0) \leq u(a) \leq \lim_{R \to \infty} \frac{\left(1 + \frac{\|a\|}{R}\right)}{\left(1 - \frac{\|a\|}{R}\right)^{n-1}} \cdot u(0) = u(0)$$

$$\Rightarrow \quad u(a) = u(0) : const \quad \square$$

c) Sei u in $\mathbb{R}^n$ beschränkt und $\Delta u = 0$, also

$$\exists \; M \geq 0 : |u(x)| \leq M \; \forall \; x$$

Wir definieren

$$\gamma := M + u$$

Wegen

$$\Delta\gamma = \Delta u + \Delta M = 0 \; in \; \mathbb{R}^n$$

und

$$\gamma \geq |u| + u \geq 0$$

muss nach Aufgabenteil (b) gelten

$$\gamma : const \quad \rightarrow \quad u : const \quad \square$$

Aufgabe 02

Annahme: Mit *Supremum* ist ein *Maximum* gemeint.
Wir nennen G das *Innere* des Definitionsgebietes von u. Liegt also in $x_0 \in G$ ein lokales Maximum vor, so muss die Hesse

Matrix H von u in x_0 negativ definit bzw. negativ semidefinit sein! Also

$$H = \begin{pmatrix} \partial_{xx}u & \partial_{xy}u \\ \partial_{yx}u & \partial_{yy}u \end{pmatrix} \; Negativ\ [semi]definit \;\to\; \forall\, \vec{r} \in \mathbb{R}^n : (H \cdot \vec{r}) \cdot \vec{r} \leq 0$$

$$\vec{r} = \vec{e}_x \;\to\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_{xx}u & \partial_{xy}u \\ \partial_{yx}u & \partial_{yy}u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \partial_{xx}u \leq 0$$

$$Analog : \vec{r} = \vec{e}_y \;\to\; \partial_{yy}u \leq 0$$

Doch das würde bedeuten dass

$$\Delta u = \partial_{xx}u + \partial_{yy}u \leq 0$$

ist, was ein Widerspruch ist! $\square$

Aufgabe 03

Sei o.B.d.A $b > a$. Betrachten die Greensche Funktion $g(\vec{a}, \vec{r})$ im Kreis B_b mit Radius b, definieren $u(\vec{r}) \equiv 1$, $\vec{a} := a\vec{e}_x$ und schreiben

$$1 = \underbrace{u(\vec{a})}_{1} - \int\limits_{B_b} g(\vec{a}, \vec{r}) \underbrace{\Delta u}_{0} \; dV = \int\limits_{\partial B_b} \underbrace{u(\vec{r})}_{1} \frac{\partial g(\vec{a}, \vec{r})}{\partial n} \; dA = \int\limits_{\partial B_b} \frac{b^2 - \|\vec{a}\|^2}{2\pi b \, \|\vec{r} - \vec{a}\|^2} dA$$

$$= \frac{(b^2 - a^2)}{2\pi b} \int\limits_0^{2\pi} \frac{b \cdot d\varphi}{(b^2 + a^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{a})} = \frac{(b^2 - a^2)}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(b^2 + a^2 - 2ab\cos\varphi)}$$

$$\to \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(b^2 + a^2 - 2ab\cos\varphi)} = \frac{2\pi}{(b^2 - a^2)}$$

wobei φ der Winkel zwischen $\vec{r}$ und $\vec{a}$ sei. Analog wäre bei $a > b$

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(b^2 + a^2 - 2ab\cos\varphi)} = \frac{2\pi}{(a^2 - b^2)}$$

Allgemein gilt für eine L-periodische, $\mathcal{R}$-Integrierbare Funktion $f(x)$ die Identität

$$\int_\alpha^{\alpha+L} f(x)\; dx = \int_\beta^{\beta+L} f(x)\; dx \quad \forall\; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

wegen

$$\int\limits_\alpha^{\alpha+L} f(x)\; dx = \int\limits_\alpha^{\beta} f(x)\; dx + \int\limits_\beta^{\alpha+L} f(x)\; dx = \int\limits_\alpha^{\beta} f(x+L)\; dx + \int\limits_\beta^{\alpha+L} f(x)\; dx = \int\limits_{\alpha+L}^{\beta+L} f(x)\; dx + \int\limits_\beta^{\alpha+L} f(x)\; dx = \int\limits_\beta^{\beta+L} f(x)\; dx$$

Somit ist

$$\int\limits_{\alpha-2\pi}^{\alpha} \frac{d\varphi}{(b^2 + a^2 - 2ab\cos\varphi)} = \frac{2\pi}{|a^2 - b^2|}$$

Variante:

Wir substituieren

$$\rho := \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) \;\rightarrow\; \cos\varphi = \frac{1-\rho^2}{1+\rho^2},\; d\varphi = \frac{2d\rho}{1+\rho^2}$$

und schreiben

$$\int \frac{d\varphi}{a^2+b^2-2ab\cos\varphi} = \int \frac{2d\rho}{\rho^2(a+b)^2+(a-b)^2} = \frac{2}{(a-b)^2}\cdot\int \frac{d\rho}{\left[\rho\frac{(a+b)}{(a-b)}\right]^2+1}$$

$$= \frac{2}{(a^2-b^2)}\cdot\arctan\left[\rho\frac{(a+b)}{(a-b)}\right] = \frac{2}{(a^2-b^2)}\cdot\arctan\left[\frac{(a+b)}{(a-b)}\cdot\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]$$

Somit erhält man

$$\int\limits_{\alpha-2\pi}^{\alpha} \frac{d\varphi}{a^2+b^2-2ab\cos\varphi} = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a^2+b^2-2ab\cos\varphi} = 2\cdot\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{a^2+b^2-2ab\cos\varphi}$$

$$= \frac{4}{(a^2-b^2)}\cdot\left[\arctan\left[\frac{(a+b)}{(a-b)}\cdot\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]\right]_0^{\pi} = \frac{2\pi}{a^2-b^2}\cdot\operatorname{sgn}(a-b) = \frac{2\pi}{|a^2-b^2|}$$

Aufgabe 04

Wir beginnen mit

$$v(x,t) = \int_0^t V(x,t,\tau)\;d\tau$$

und gehen damit in die 2. PDG ein:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\underbrace{V(x,t,t)}_{0} + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}V(x,t,\tau)\;d\tau\right) - a^2\frac{\partial}{\partial x}\int_0^t \frac{\partial}{\partial x}V(x,t,\tau)\;d\tau$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}V(x,t,t) + \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial t^2}V(x,t,\tau)\;d\tau - a^2\int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2}V(x,t,\tau)\;d\tau$$

$$= f(x,t) + \int_0^t \underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}V(x,t,\tau) - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}V(x,t,\tau)\right)}_{0}\;d\tau = f(x,t)$$

Analog behandeln wir die Randbedingungen:

$$v(x,0) = \int_0^0 V(x,0,\tau)\;d\tau = 0,\quad \frac{\partial}{\partial t}v(x,0) = \underbrace{V(x,0,0)}_{0} + \int_0^0 \frac{\partial}{\partial t}V(x,0,\tau)\;d\tau = 0$$

und sehen dass $v(x,t)$ eine Lösung ist. Um V zu finden, beginnen wir mit einer Variablensubstitution

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi(x,t) \\ \eta(x,t) \end{pmatrix}$$

so dass

$$\xi_t - \lambda_1\xi_x = 0,\; \eta_t - \lambda_2\eta_x = 0$$

mit

$$\lambda_{1,2}^2 - a^2 = 0 \;\rightarrow\; \lambda_{1,2} = \pm a$$

erfüllt ist. (Siehe dazu Übungsserie 09)
Geeignete Substitutionen sind zum Beispiel

$$\xi = x + at, \ \eta = x - at$$

und wir erhalten zunächst für

$$V(x,t,\tau) =: V_\tau(x,t) =: V(\xi,\eta)$$

die PDG

$$0 = \frac{\partial}{\partial t^2}V - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}V = \frac{\partial}{\partial t}\left(V_\xi \xi_t + V_\eta \eta_t\right) - a^2\frac{\partial}{\partial x}\left(V_\xi \xi_x + V_\eta \eta_x\right) = a\frac{\partial}{\partial t}\left(V_\xi - V_\eta\right) - a^2\frac{\partial}{\partial x}\left(V_\xi + V_\eta\right)$$

$$= a\left(V_{\xi^2}\xi_t + V_{\xi\eta}\eta_t - V_{\eta\xi}\xi_t - V_{\eta^2}\eta_t\right) - a^2\left(V_{\xi^2}\xi_x + V_{\xi\eta}\eta_x + V_{\eta\xi}\xi_x + V_{\eta^2}\eta_x\right)$$

$$= a^2\left(V_{\xi^2} - 2V_{\xi\eta} + V_{\eta^2}\right) - a^2\left(V_{\xi^2} + 2V_{\xi\eta} + V_{\eta^2}\right) = -4a^2 V_{\eta\xi}$$

Für $a \neq 0$ muss also gelten

$$V_{\eta\xi} = 0 \ \rightarrow \ V(\xi,\eta) = u(\xi,\tau) + w(\eta,\tau) \ \rightarrow \ V(x,t,\tau) = u(x+at,\tau) + w(x-at,\tau)$$

Wir machen den Ansatz

$$V(x,t,\tau) = u(x + a(t-\tau)) + w(x - a(t-\tau))$$

Durch die Forderung

$$V(x,t,t) \overset{!}{=} 0 \ \forall \ x,t$$

erhällt man

$$u(x) + w(x) = 0 \ \forall \ x$$

Durch

$$\frac{\partial V}{\partial t}(x,t,t) \overset{!}{=} f(x,t)$$

erhält man analog

$$a\frac{\partial u}{\partial \xi}(x) - a\frac{\partial w}{\partial \eta}(x) = a\frac{\partial u}{\partial x}(x) - a\frac{\partial w}{\partial x}(x) = f(x,\tau) \ \rightarrow \ u(\chi) - w(\chi) = \frac{1}{a}\cdot\int_{\chi_0}^{\chi} f(x',\tau)\ dx'$$

bzw.

$$u(\chi) = \frac{1}{2a}\cdot\int_{\chi_0}^{\chi} f(x',\tau)\ dx' \quad \wedge \quad w(\chi) = -\frac{1}{2a}\cdot\int_{\chi_0}^{\chi} f(x',\tau)\ dx'$$

und schließlich

$$V(x,t,\tau) = \frac{1}{2a}\cdot\int_{x_0}^{x+a(t-\tau)} f(x',\tau)\ dx' - \frac{1}{2a}\cdot\int_{x_0}^{x-a(t-\tau)} f(x',\tau)\ dx' = \frac{1}{2a}\cdot\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(x',\tau)\ dx'$$

Durch Einsetzen sieht man dass beide Forderungen erfüllt sind:

$$\frac{\partial V}{\partial t}\ |_{t=\tau} = \frac{1}{2a}\cdot\left[f(x+a(t-\tau),\tau)\cdot a + f(x-a(t-\tau),\tau)\cdot a\right]|_{t=\tau} = f(x,\tau)$$

$$V(x,t,t) = \frac{1}{2a}\cdot\int_x^x f(x',\tau) = 0$$

Somit ergibt sich $v(x,t)$ als

$$\boxed{v(x,t) = \frac{1}{2a}\cdot\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(x',\tau)\ dx'\ d\tau}$$

Aufgabe 05

Wir beginnen mit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

machen den Ansatz

$$u(x,t) = \Phi(x - at) = \Phi(\chi)$$

gehen damit in die PDG ein:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 \frac{d^2\Phi}{d\chi^2} - a^2 \frac{d^2\Phi}{d\chi^2} = 0$$

und sehen dass der Ansatz korrekt ist! Durch

$$u(x,0) \stackrel{!}{=} 0 \ \forall \ x > 0$$

erhalten wir

$$\Phi(x) = 0 \ \forall \ x > 0 \ \rightarrow \ \Phi(x - at) = 0 \ \ \forall \ x > at \ \ (\textit{Raumartige Punkte!})$$

Durch

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) \stackrel{!}{=} 0 \ \ \forall \ x > 0$$

erhalten wir

$$-a\frac{d\Phi}{d\chi}(x) = 0 \ \ \forall \ x > 0 \ \rightarrow \ \frac{d\Phi}{d\chi}(\chi) = 0 \ \ \forall \ x > at$$

Durch die Randbedingung

$$u(0,t) \stackrel{!}{=} \mu(t) \ \ \forall \ t > 0$$

erhalten wir dann schließlich

$$\Phi(-at) = \mu(t) \ \ \forall \ t > 0 \rightarrow \ \Phi(\chi) = \mu\left(-\frac{\chi}{a}\right) \ \ \forall \ \chi < 0 \ \ \rightarrow \ \Phi(x - at) = \mu\left(t - \frac{x}{a}\right) \ \ \forall \ x < at \ \ (\textit{Zeitartige Punkte!})$$