Übungen zur Vorlesung Analysis III (WS 07/08)

11. Übungsserie

1. a) Es sei u eine nichtnegative harmonische Funktionen auf der offenen Kugel $B = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x\| < R\}$. Beweisen Sie die Harnacksche Ungleichung

$$\frac{1 - \frac{\|x\|}{R}}{\left(1 + \frac{\|x\|}{R}\right)^{n-1}} \, u(0) \leq u(x) \leq \frac{1 + \frac{\|x\|}{R}}{\left(1 - \frac{\|x\|}{R}\right)^{n-1}} \, u(0) \ .$$

Leiten Sie daraus ab:

b) Jede auf ganz $\mathbb{R}^n$ positive harmonische Funktion ist konstant.

c) Jede auf ganz $\mathbb{R}^n$ nach oben (oder unten) beschränkte harmonische Funktion ist konstant.

2. Zeigen Sie:
Eine zweimal stetig differenzierbare Funktion v von zwei Variablen mit $\Delta v > 0$ kann im Inneren ihres Definitionsgebietes ihr Supremum nicht annehmen.

3.* Berechnen Sie

$$\int\limits_{\alpha-2\pi}^{\alpha} \frac{d\varphi}{a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi} \qquad a, b, \alpha \in \mathbb{R} \ .$$

4. Die Lösung der Aufgabe

$$\begin{aligned} u_{tt} - a^2 u_{xx} &= f(x,t)\,, \qquad && x \in \mathbb{R}_1\,, \ t > 0 \\ u(x,0) &= \varphi(x)\,, && u_t(x,0) = \psi(x) \end{aligned}$$

geschieht in zwei Etappen:

a) $h_{tt} - a^2 h_{xx} = 0$
$h(x,0) = \varphi(x)\,, \quad h_t(x,0) = \tau(x)$

b) $v_{tt} - a^2 v_{xx} = f(x,t)$
$v(x,0) = 0\,, \quad v_t(x,0) = 0$

Die Aufgabe a) ist Gegenstand der Vorlesung. Für die Aufgabe b) machen wir den Ansatz $v(x,t) = \int\limits_0^t V(x,t,\tau)d\tau$
Zeigen Sie, dass $v(x,t)$ eine Lösung von b) wird, falls $V(x,t,\tau)$ eine Lösung von

$$\begin{aligned} &V_{tt} - a^2 V_{xx} = 0 \\ &V|_{t=\tau} = 0\,, \quad V_t|_{t=\tau} = f(x,\tau) \ \text{ ist.} \end{aligned}$$

Nutzen Sie a) zur Gewinnung von V und der Lösung v.

5.* Lösen Sie $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$
$u(x,0) = u_t(x,0) = 0 \quad$ für $\ 0 < x < \infty$
$u(0,t) = \mu(t), \quad t > 0$

(erzwungene Auslenkung im Nullpunkt)
Hinweis: Machen sie den Ansatz $u(x,t) = \Phi(x - at)$

Es wird empfohlen, alle mit * gekennzeichneten Aufgaben schriftlich zu bearbeiten und in den Übungen in der Woche vom 14.01. bis 18.01.2008 abzugeben.