Analysis III
FSU Jena - WS 07/08
Serie 10 - Lösungen

Stilianos Louca

7. Januar 2008

Aufgabe 01

a) Der Gradient von N_a ist allgemein gegeben durch

$$\operatorname{grad} N_a(x) = \sum_k \frac{\partial N_a}{\partial x_k} \cdot \vec{e}_k$$

Für den Fall $n = 2$ ergibt sich

$$\operatorname{grad} N_a(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_k \frac{1}{\|x-a\|} \cdot \frac{\partial \|x-a\|}{\partial x_k} \cdot \vec{e}_k = \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_k \frac{(x_k - a_k)}{\|x-a\|^2} \cdot \vec{e}_k = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{(x-a)}{\|x-a\|^2}$$

und für $n \geq 3$

$$\operatorname{grad} N_a(x) = -\frac{1}{(n-2)\omega_n} \cdot \sum_k \frac{(2-n)}{\|x-a\|^{n-1}} \cdot \frac{(x_k - a_k)}{\|x-a\|} \cdot \vec{e}_k = \frac{1}{\omega_n} \cdot \frac{(x-a)}{\|x-a\|^n}$$

Setzen wir

$$\beta_n := \frac{1}{\omega_n} \ , \ n \geq 2$$

ergibt sich zusammengefasst

$$\boxed{\operatorname{grad} N_a(x) = \beta_n \cdot \frac{(x-a)}{\|x-a\|^n}}$$

b) Wir hetzen den Δ Operator auf N_a und bekommen

$$\Delta N_a(x) = \operatorname{div} \operatorname{grad} N_a = \beta_n \cdot \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{(x_k - a_k)}{\|x-a\|^n} = \beta_n \cdot \sum_k \left\{ \frac{1}{\|x-a\|^n} - \frac{n(x_k - a_k)}{\|x-a\|^{n+1}} \cdot \frac{\partial \|x-a\|}{\partial x_k} \right\}$$

$$= \beta_n \cdot \sum_k \left\{ \frac{1}{\|x-a\|^n} - \frac{n(x_k - a_k)^2}{\|x-a\|^{n+2}} \right\} = \frac{\beta_n}{\|x-a\|^{2+n}} \cdot \sum_k \left[\|x-a\|^2 - n(x_k - a_k)^2 \right]$$

$$= \frac{\beta_n}{\|x-a\|^{2+n}} \cdot \left[n \cdot \|x-a\|^2 - n \sum_k (x_k - a_k)^2 \right] = \frac{\beta_n}{\|x-a\|^{2+n}} \cdot \left[n \cdot \|x-a\|^2 - n \|x-a\|^2 \right] = 0 \quad \square$$

Aufgabe 02

a) Wir schreiben

$$\int_{\partial V}\left(u\frac{\partial\gamma_a}{\partial n}-\gamma_a\frac{\partial u}{\partial n}\right)\,dA+\int_V\gamma_a\Delta u\,dV$$

$$=\int_{\partial V}\left(u\frac{\partial N_a}{\partial n}-N_a\frac{\partial u}{\partial n}\right)\,dA+\int_V N_a\Delta u\,dV+\underbrace{\int_{\partial V}\left(u\frac{\partial\Phi}{\partial n}-\Phi\frac{\partial u}{\partial n}\right)\,dA+\int_V\Phi\Delta u\,dV}_{\int_V u\Delta\Phi\,dV=0}\overset{S.1}{=}\begin{cases}u(a) & : a\in A^o\\ 0 & : a\in\mathbb{R}^n\setminus\{A\}\end{cases}\qquad\square$$

b) Analog

$$V_\varepsilon:=\{x\in\mathbb{R}^n:\|x-a\|\leq\varepsilon\}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial V_\varepsilon}\left(u\frac{\partial\gamma_a}{\partial n}-\gamma_a\frac{\partial u}{\partial n}\right)\,dA=\underbrace{\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial V_\varepsilon}\left(u\frac{\partial N_a}{\partial n}-N_a\frac{\partial u}{\partial n}\right)\,dA}_{u(a)}+\underbrace{\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial V_\varepsilon}\left(u\frac{\partial\Phi}{\partial n}-\Phi\frac{\partial u}{\partial n}\right)\,dA}_{*0}=u(a)$$

da Φ und u in einem kompakten Intervall stetig bzw. stetig differenzierbar und somit endlich sind, also

$$(*):\lim_{\varepsilon\to 0}\left|\int_{\partial V_\varepsilon}\left(u\frac{\partial\Phi}{\partial n}-\Phi\frac{\partial u}{\partial n}\right)\,dA\right|\leq\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\partial V_\varepsilon}\left|u\frac{\partial\Phi}{\partial n}-\Phi\frac{\partial u}{\partial n}\right|\,dA\leq\lim_{\varepsilon\to 0}\overline{\left|u\frac{\partial\Phi}{\partial n}-\Phi\frac{\partial u}{\partial n}\right|}\cdot\int\limits_{\partial V_\varepsilon}dA$$

$$=\overline{\left|u\frac{\partial\Phi}{\partial n}-\Phi\frac{\partial u}{\partial n}\right|}\cdot\lim_{\varepsilon\to 0}\omega_n\cdot\varepsilon^{n-1}=0$$

$$\to\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\partial V_\varepsilon}\left(u\frac{\partial\Phi}{\partial n}-\Phi\frac{\partial u}{\partial n}\right)\,dA=0\quad\square$$

Aufgabe 03

Wir schreiben das ganze in Polarkoordinaten um

$$\Delta u=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$$

und machen den Separationsansatz

$$u(r,\varphi)=R(r)\cdot\Phi(\varphi)$$

Wir gehen damit in die PDG ein und erhalten 2 gewöhnliche DGL gemäß

$$\frac{\Phi}{r}\left(R'+rR''\right)+\frac{R}{r^2}\Phi''=0\;\to\;\frac{r^2R''+rR'}{R}=-\frac{\Phi''}{\Phi}=:h\in\mathbb{R}$$

$$\to\;r^2R''+rR'-hR=0,\;\Phi''+h\Phi=0$$

deren allgemeine Lösungen sich ergeben als

$$h\neq 0:\Phi_h(\varphi)=A_he^{\sqrt{-h}\varphi}+B_he^{-\sqrt{-h}\varphi},\quad R_h(r)=C_hr^{\sqrt{h}}+D_hr^{-\sqrt{h}}$$

$$h=0:\Phi_0(\varphi)=A_0+B_0\varphi,\quad R_h(r)=C_0+D_0r^2$$

wobei bis jetzt noch keine Aussage über h gemacht worden ist!
Da gelten muss

$$u(r,\varphi) = u(r,\varphi+2\pi)\ \forall\ h$$

sind nur φ-Periodische Funktionen für Φ zu betrachten. Also muss $\sqrt{-h} \in \mathbb{C}$ bzw. $h > 0$ sein, und wir erhalten

$$\Phi_h(\varphi) = A_h e^{i\sqrt{h}\varphi} + B_h e^{-i\sqrt{h}\varphi}$$

Ferner:

$$A_h\left(1-e^{i2\pi\sqrt{h}}\right)\cdot e^{i\sqrt{h}\varphi} + B_h\left(1-e^{-i2\pi\sqrt{h}}\right)\cdot e^{-i\sqrt{h}\varphi} = 0\ \forall\ \varphi\ \rightarrow\ e^{i2\pi\sqrt{h}} = e^{-i2\pi\sqrt{h}} = 1$$

$$\rightarrow\ \sin\left(2\pi\sqrt{h}\right) = 0\ \rightarrow\ \cos\left(2\pi\sqrt{h}\right) = 1\ \rightarrow\ \sqrt{h} \in \mathbb{N}$$

Die allgemeine Lösung ergibt sich also als

$$u(r,\varphi) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \Phi_n(\varphi)\cdot R_n(r) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left[C_n r^n + D_n r^{-n}\right]\cdot\left[A_n\cos(n\varphi) + B_n\sin(n\varphi)\right]$$

Durch die Forderung

$$u(1,\varphi) \stackrel{!}{=} \sin\varphi\cos\varphi = \frac{1}{2}\sin(2\varphi)$$

ergibt sich

$$\int_0^{2\pi} u(1,\varphi)\sin(k\varphi) = \sum_{n\in\mathbb{N}}^{\infty}\int_0^{2\pi}(C_n+D_n)\cdot\left[A_n\cos(n\varphi)\sin(k\varphi) + B_n\sin(n\varphi)\sin(k\varphi)\right] = \sum_{n\in\mathbb{N}}(C_n+D_n)\cdot B_n\pi\delta_{nk}$$

$$= B_k\pi(C_k+D_k) \stackrel{!}{=} \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\sin(2\varphi)\cdot\sin(k\varphi)\ d\varphi = \frac{\pi}{2}\cdot\delta_{2k}\ \rightarrow\ B_k = \begin{cases} \dfrac{1}{2(C_k+D_k)} & : k=2 \\ 0 & : sonst \end{cases}$$

$$Analog:\ \ A_k = 0\ \forall\ k$$

$$\rightarrow\ u(r,\varphi) = \left(Cr^2 + \frac{D}{r^2}\right)\cdot\frac{1}{2(C+D)}\cdot\sin(2\varphi) \stackrel{*}{\cong} \left[\mathcal{W}r^2 + \left(\frac{1}{2}-\mathcal{W}\right)\frac{1}{r^2}\right]\cdot\sin(2\varphi)\ ,\quad (*) : Sub : \mathcal{W} := \frac{C}{C+D}$$

Damit u in $r = 0$ definiert ist, muss $\mathcal{W} = \dfrac{1}{2}$ sein, und somit

$$u(r,\varphi) = \frac{r^2}{2}\sin(2\varphi) = r^2\cos\varphi\cdot\sin\varphi \equiv x\cdot y$$

Variante: Man sieht sofort dass

$$u(x,y) = xy = r^2\cos\varphi\cdot\sin\varphi$$

eine harmonische Funktion ist und die Dirichlet-Randbedingung erfüllt. Durch den Eindeutigkeitssatz über PDG mit Dirichletschen RB weiss man dass dies die einzige Lösung ist. $\square$

Aufgabe 04

Die Greensche Funktion für die $n \geq 3$-dimensionale Kugel mit dem Radius R ist für $a \neq 0$ gegeben durch

$$g(a,x) = -\frac{1}{(n-2)\omega_n}\cdot\left[\frac{1}{\|x-a\|^{n-2}} - \left(\frac{R}{\|a\|}\right)^{n-2}\cdot\frac{1}{\left\|x-\frac{R^2}{a^2}a\right\|^{n-2}}\right]$$

Für $a = 0$ entsprechend

$$g(0,x) = \frac{-1}{(n-2)\omega_n} \cdot \left(\frac{1}{\|x\|^{n-2}} - R^{2-n} \right)$$

Hilfsatz: Für $a \neq 0, \|x\| = R,\ n \geq 2$ gilt:

$$\left\| \frac{x}{R} - \frac{R}{a^2}a \right\| = \frac{1}{\|a\|} \cdot \|x-a\|$$

Beweis:

$$\left\| \frac{x}{R} - \frac{R}{a^2}a \right\|^2 = \left(\frac{x^2}{R^2} + \frac{R^2}{a^4}a^2 - \frac{2xa}{a^2} \right) = \left(1 + \frac{R^2}{a^2} - \frac{2xa}{a^2} \right) = \frac{1}{a^2} \cdot \left(a^2 + \underbrace{R^2}_{x^2} - 2xa \right) = \frac{1}{a^2} \cdot \|x-a\|^2 \quad \square$$

Somit folgt für $a \neq 0,\ n \geq 3$

$$\operatorname{grad} g(a,x) = \beta_n \cdot \left(\frac{(x-a)}{\|x-a\|^n} - \left(\frac{R}{\|a\|} \right)^{n-2} \cdot \frac{\left(x - \frac{R^2}{a^2}a \right)}{\left\| x - \frac{R^2}{a^2}a \right\|^n} \right)$$

$$= \beta_n \cdot \left(\frac{(x-a)}{\|x-a\|^n} - \frac{R^n}{\|a\|^{n-2}} \cdot \frac{\left(\frac{x}{R^2} - \frac{a}{a^2} \right)}{R^n \left\| \frac{x}{R} - \frac{R}{a^2}a \right\|^n} \right) = \beta_n \cdot \left(\frac{(x-a)}{\|x-a\|^n} - \frac{1}{\|a\|^{n-2}} \cdot \frac{a^n \left(\frac{x}{R^2} - \frac{a}{a^2} \right)}{\|x-a\|^n} \right)$$

$$= \beta_n \cdot \left(\frac{(x-a)}{\|x-a\|^n} - a^2 \cdot \frac{\left(\frac{x}{R^2} - \frac{a}{a^2} \right)}{\|x-a\|^n} \right) = \frac{\beta_n}{\|x-a\|^n} \cdot \left(x - a - \frac{xa^2}{R^2} + a \right) = \frac{\beta_n x}{\|x-a\|^n} \left(1 - \frac{a^2}{R^2} \right)$$

$$\to \frac{\partial g}{\partial n} = \operatorname{grad} g \cdot \frac{x}{R} = \frac{\beta_n x^2}{R\,\|x-a\|^n} \cdot \frac{1}{R^2} \left(R^2 - a^2 \right) = \frac{\beta_n (R^2 - a^2)}{R\,\|x-a\|^n}$$

Für $a = 0,\ n \geq 3$ entsprechend

$$\frac{\partial g}{\partial n} = \operatorname{grad} g \cdot \frac{x}{R} = \beta_n \cdot \frac{x}{\|x\|^n} \cdot \frac{x}{R} = \frac{\beta_n x^2}{R\,\|x\|^n} = \frac{\beta_n R^2}{R\,\|x\|^n} \cong \frac{\beta_n (R^2 - a^2)}{R\,\|x-a\|^n}$$

Für $n = 2,\ a \neq 0$ ist die Greensche Funktion gegeben durch

$$g(a,x) = \frac{1}{2\pi} \left(\ln \|x-a\| - \ln \left\| \frac{\|a\|}{R} x - \frac{R}{\|a\|} a \right\| \right)$$

und für $a = 0$ entsprechend

$$g(0,x) = \frac{1}{2\pi} \left(\ln \|x\| - \ln R \right)$$

Demnach können wir für $a \neq 0$ schreiben

$$\frac{\partial g}{\partial n} = \operatorname{grad} g \cdot \frac{x}{R} = \frac{x\beta_2}{R} \cdot \left(\frac{(x-a)}{\|x-a\|^2} - \frac{\|a\|}{R} \cdot \frac{\left(\frac{\|a\|}{R} x - \frac{R}{\|a\|} a \right)}{\left\| \frac{\|a\|}{R} x - \frac{R}{\|a\|} a \right\|^2} \right)$$

$$= \frac{x\beta_2}{R} \cdot \left(\frac{(x-a)}{\|x-a\|^2} - \frac{\|a\|}{R} \cdot \frac{\left(\frac{\|a\|}{R} x - \frac{R}{\|a\|} a \right)}{a^2 \left\| \frac{x}{R} - \frac{R}{a^2} a \right\|^2} \right) = \frac{x\beta_2}{R} \cdot \left(\frac{(x-a)}{\|x-a\|^2} - \frac{\|a\|}{R} \cdot \frac{\left(\frac{\|a\|}{R} x - \frac{R}{\|a\|} a \right)}{\|x-a\|^2} \right)$$

$$= \frac{\beta_2}{R\,\|x-a\|^2} \cdot \left(x^2 - ax - \frac{a^2}{R^2} x^2 + ax \right) = \frac{\beta_2 \left(R^2 - a^2 \right)}{R\,\|x-a\|^2}$$

und für $a = 0$ entsprechend

$$\frac{\partial g}{\partial n} = \operatorname{grad} g \cdot \frac{x}{R} = \beta_n \cdot \frac{x}{\|x\|^2} \cdot \frac{x}{R} = \frac{\beta_n R^2}{R\,\|x\|^2} \cong \frac{\beta_n \left(R^2 - a^2 \right)}{R\,\|x\|^2} \quad \square$$

Aufgabe 05

Wir machen für die Greensche Funktion $g(a,x)$ im Gebiet $\mathcal{H}$ der Halbkugel den Ansatz

$$g(a,x) = N_a(x) + \Phi_a^1(x) + \Phi_a^2(x) + \Phi_a^3(x)$$

mit

$$\Phi_a^1(x) := -N_{a^1}(x),\ a^1 := (a_1, ..., a_{n-1}, -a_n) \notin \mathcal{H}, \quad \left\|a^1\right\| = \|a\|$$

$$\Phi_a^2(x) := -\left(\frac{R}{\|a\|}\right)^{n-2} \cdot N_{a^2}(x),\ a^2 := \frac{R^2}{\|a\|^2} \cdot a \ \notin \mathcal{H}$$

$$\Phi_a^3(x) := \left(\frac{R}{\|a\|}\right)^{n-2} \cdot N_{a^3}(x),\ a^3 := \left(a_1^2, .., a_{n-1}^2, -a_n^2\right) = \frac{R^2}{\|a\|^2} \cdot \underbrace{(a_1, ..., a_{n-1}, -a_n)}_{a^1} = \notin \mathcal{H}$$

für $n \geq 3$ und

$$\Phi_a^1(x) := -N_{a^1}(x)$$

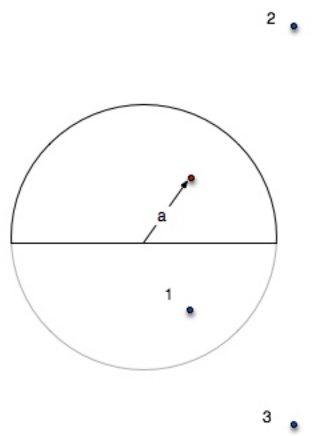
$$\Phi_a^2(x) := -\frac{1}{2\pi} \cdot \ln \left\| \frac{\|a\|}{R} x - \frac{R}{\|a\|} a \right\|$$

$$\Phi_a^3(x) := \frac{1}{2\pi} \cdot \ln \left\| \frac{\|a^1\|}{R} x - \frac{R}{\|a^1\|} a^1 \right\|$$

für $n = 2$, wobei $N_a(x)$ das Newton-Potential sei. Dabei sind für $a = 0$ die entsprechenden Grenzwerte zu übernehmen:

$$g(0,x) := \lim_{a \to 0} g(a,x)$$

Die 3 *Zusatzterme* entsprechen den 3 unten illustrierten *Spiegeltermen*:



Allgemein ist

$$\Delta\Phi_a^1(x) = \Delta\Phi_a^2(x) = \Delta\Phi_a^3(x) = 0 \ \rightarrow \ \Delta g(a,x) = 0 \ in \ \mathcal{H} \setminus \{a\}$$

Die Funktion

$$g^1(a,x) := N_a(x) + \Phi_a^1(x)$$

ist die Greensche Funktion für den Halbraum $x_n > 0$. Analog, ist auch die Funktion

$$g^2\left(a^2, x\right) := \Phi_a^2(x) + \Phi_a^3(x)$$

bzgl. a^2 die Greensche Funktion für den Halbraum $x_n > 0$. Somit ist

$$g(a,x) = \underbrace{g^1(a,x)}_{0} + \underbrace{g^2\left(a^2,x\right)}_{0} = 0 \; für \; x_n = 0$$

Ferner sind

$$g^3(a,x) := N_a(x) + \Phi_a^2(x) \quad , \quad g^4\left(a^1,x\right) := \Phi_a^1(x) + \Phi_a^3(x)$$

bzgl. a bzw. a^1 Greensche Funktionen für die Kugel $\|x\| < R$. Somit gilt

$$g(a,x) = g^3(a,x) + g^4(a,x) = 0 \; für \; \|x\| = R$$

Somit ist $g(a, \partial\mathcal{H}) = 0$ und ferner g eine Greensche Funktion für die Halbkugel. $\square$