Übungen zur Vorlesung Analysis III (WS 07/08)

10. Übungsserie

1.* Es sei $N_a(x) := \begin{cases} \frac{-1}{(n-2)\omega_n}\,\frac{1}{\|x-a\|^{n-2}} & n \geq 3 \\ \frac{1}{2\pi}\ln\|x-a\| & n = 2 \end{cases}$.

a)* Berechnen Sie grad $N_a(x)$

b) Zeigen Sie, dass $\Delta N_a(x) = 0$ für $x \neq a$

2. Es sei $\gamma_a(x) := N_a(x) + \Phi(x)$ mit $\Delta\Phi = 0$. Zeigen Sie, dass

a)* $\displaystyle\int\limits_{\partial A}(u(x)\frac{\partial\gamma_a(x)}{\partial n} - \gamma_a(x)\frac{\partial u}{\partial n}(x))do + \int\limits_A \gamma_a(x)\Delta u(x)dx = \begin{cases} u(a) & a \in \overset{\circ}{A} \\ 0 & a \in I\!R^n \setminus A \end{cases}$

Hinweis: Übertragen Sie die Darstellungsformel (Satz 1).

b) $\displaystyle u(a) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\|x-a\|=\varepsilon}\left(u(x)\frac{\partial\gamma_a(x)}{\partial n} - \gamma_a\frac{\partial u(x)}{\partial n}\right)do$

3. Es sei $K_1(0) \subseteq I\!R^2$ der Einheitskreis.

Lösen Sie $\Delta u = 0$ in $\overset{\circ}{K_1}(0)$

$u|_{\partial K_1} = \sin\varphi \cdot \cos\varphi$.

(φ gemäß Polarkoordinaten)

Hinweis: Aufgabe 1 der 8. ÜS

4. Sei $g(a,x)$ die Greensche Funktion für die n-dimensionale Kugel ($n \geq 3$) bzw. den Kreis ($n = 2$).

Zeigen Sie, dass $\frac{\partial g(a,x)}{\partial n} = \frac{R-\|a\|^2}{R\omega_n\|x-a\|^n}$ für $\|x\| = R$.

5. Bestimmen Sie die Greensche Funktion für die Halbkugel ($n \geq 3$), bzw. den Halbkreis ($n = 2$)

$$H = \{x : x = (x_1, \cdots x_n),\ \|x\| \leq I\!R,\ x_n \geq 0\}.$$

Es wird empfohlen, alle mit * gekennzeichneten Aufgaben schriftlich zu bearbeiten und in den Übungen in der Woche vom 7.01. bis 11.01.2007 abzugeben.