Analysis III
FSU Jena - WS 07/08
Serie 09 - Lösungen

Stilianos Louca

2. März 2008

Aufgabe 01

Die Charakteristiken der partiellen DGL

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y^2\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

sind gegeben durch die gewöhnliche DGL

$$\frac{y^2}{x} = y'(x)$$

deren allgemeine Lösung gegeben ist durch

$$\ln|x| + \frac{1}{y} = C(x,y) : const$$

Die allgemeine Lösung der PDG ergibt sich demnach als

$$u(x,y) = U\left(C(x,y)\right) = U\left(\frac{1}{y} + \ln|x|\right)$$

wobei $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine beliebige differenzierbare Funktion sein kann.

Aufgabe 02

a) Betrachten die Definitheit von

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & xy \end{pmatrix}$$

d.h untersuchen in welchen Fällen

$$A\left(\vec{h},\vec{h}\right) = h_x^2 + xyh_y^2$$

negativ bzw. positiv ist. Wir sehen dass A in

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\right\}$$

positiv definit ist, weshalb da auch die PDG elliptisch ist. Andernfalls, ist die PDG im Bereich

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy < 0\right\}$$

hyperbolisch. Im restlichen Bereich ist die PDG parabolisch.

b) Die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} \sin^2 x\ e^y & e^y \\ e^y & 2e^y \end{pmatrix}$$

hat die (reellen) Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = \frac{e^y}{2}\left(\sin^2 x + 2\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{e^{2y}\left(\sin^2 x + 2\right)^2 - 4e^{2y}\left(2\sin^2 x - 1\right)}$$

Sie ist genau dann definit wenn beide Eigenwerte gleiches Vorzeichen haben und ungleich 0 sind:

$$\sqrt{e^{2y}\left(\sin^2 x+2\right)^2-4e^{2y}\left(2\sin^2 x-1\right)}<e^y\left(\sin^2 x+2\right) \ \rightsquigarrow\ \sin^2 x>\frac{1}{2}$$

Somit ist die PDG im Bereich

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\sin^2 x>\frac{1}{2}\right\}$$

elliptisch. Im Bereich

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\sin^2 x=\frac{1}{2}\right\}$$

ist die Matrix semidefinit und somit die PDG parabolisch. Im Bereich

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\sin^2 x<\frac{1}{2}\right\}$$

ist die PDG hyperbolisch.

Aufgabe 03

a) Wir substituieren

$$\xi=\xi(x,y),\ \ \eta=\eta(x,y)$$

und schreiben

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\quad,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\right]+\frac{\partial \eta}{\partial x}\cdot\left[\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\right]+\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 \eta}{\partial \eta^2}\cdot\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

Analog auch:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial^2 \eta}{\partial \eta^2}\cdot\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}$$

und

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial^2 \xi}{\partial y\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial y\partial x}+\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}$$

Eingesetzt erhalten wir also

$$Lu=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot\underbrace{\left[a_{11}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+2a_{12}\frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+a_{22}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2\right]}_{\alpha_{11}}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot\underbrace{\left[a_{11}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2+2a_{12}\frac{\partial \eta}{\partial x}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}+a_{22}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2\right]}_{\alpha_{22}}$$

$$+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}\cdot 2\underbrace{\left[a_{11}\frac{\partial \eta}{\partial x}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+a_{22}\frac{\partial \eta}{\partial y}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+a_{12}\frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}+a_{12}\frac{\partial \eta}{\partial x}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}\right]}_{\alpha_{12}}$$

$$+\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\underbrace{\left[a_{11}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+a_{22}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}+b_1\frac{\partial \xi}{\partial x}+b_2\frac{\partial \xi}{\partial y}+2a_{12}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y\partial x}\right]}_{\beta_1}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\underbrace{\left[a_{11}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}+a_{22}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}+b_1\frac{\partial \eta}{\partial x}+b_2\frac{\partial \eta}{\partial y}+2a_{12}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y\partial x}\right]}_{\beta_2}+cu$$

b) Es muss stets gelten

$$\alpha_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 \equiv 0 \quad , \quad \alpha_{22} = a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2 \equiv 0$$

also

$$a_{11}\left(\frac{\xi_x}{\xi_y}\right)^2 + 2a_{12}\frac{\xi_x}{\xi_y} + a_{22} \equiv 0 \quad , \quad a_{11}\left(\frac{\eta_x}{\eta_y}\right)^2 + 2a_{12}\frac{\eta_x}{\eta_y} + a_{22}$$

Demnach muss die Gleichung

$$a_{11}\lambda^2 + 2a_{12}\lambda + a_{22} = 0$$

mindestens eine Nullstelle haben, um somit die entsprechenden ξ und η finden zu können.
Bemerke: Diese Nullstellen sind eigentlich ortsabhängige Funktionen!
Seien $\lambda_1(x,y)$ und $\lambda_2(x,y)$ diese (gegebenenfalls unterschiedlichen) beiden Nullstellen. Dann ergibt sich

$$\xi_x - \lambda_1\xi_y = 0, \quad \eta_x - \lambda_2\eta_y = 0$$

Die Charakteristiken dieser beiden PDG sind gegeben durch

$$y_i' = -\lambda_i(x,y) \;\rightsquigarrow\; y_i = -\Lambda_i(x)$$

und entsprechend die allgemeinen Lösungen von ξ bzw. η:

$$\xi(x,y) = f\left(y + \Lambda_1(x)\right), \; \eta(x,y) = g\left(y + \Lambda_2(x)\right)$$

Es wird dadurch eine Koordinatentransformation

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(y+\Lambda_1(x)) \\ g(y+\Lambda_2(x)) \end{pmatrix}$$

definiert. Damit (x,y) eindeutig bei gegebenem (ξ,η) bestimmt ist, also F nach (x,y) auflösbar ist, muss F' nicht singulär sein:

$$\det(F') = \det\begin{pmatrix} f'\Lambda_1' & f' \\ g'\Lambda_2' & g' \end{pmatrix} = f'g'\Lambda_1' - f'g'\Lambda_2' \overset{!}{\neq} 0 \;\rightarrow\; \lambda_1 = \Lambda_1' \neq \Lambda_2' = \lambda_2$$

Das oben genannte Polynom $a_{11}\lambda^2 + 2a_{12}\lambda + a_{22}$ muss im Falle eines Strebens nach einer umkehrbaren Koordinatentransformation zwei Nullstellen haben! Es muss also gelten:

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \overset{!}{>} 0$$

was genau für hyperbolische PDG erfüllt ist!
Demnach erhält man schließlich eine neue (ebenfalls hyperbolische) PDG

$$\alpha_{12} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi} + \beta_1\frac{\partial u}{\partial\xi} + \beta_2\frac{\partial u}{\partial\eta} + cu = 0$$

c) Siehe oben!

Aufgabe 04

a) Wir beginnen mit der PDG

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y\frac{\partial u}{\partial y^2} = 0$$

und führen wie in der vorigen Aufgabe beschrieben die Koordinatentransformation

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi(x,y) \\ \eta(x,y) \end{pmatrix}$$

ein, so dass

$$\xi_x - \lambda_1\xi_y = 0 \; , \; \eta_x - \lambda_2\eta_y = 0$$

gilt, wobei $\lambda_1 = \sqrt{y},\ \lambda_2 = -\sqrt{y}$ die beiden Nullstellen des Polynoms

$$a_{11}\lambda^2 + 2a_{12}\lambda + a_{22} = \lambda^2 - y = 0$$

sind. Dann ergeben sich die allgemeinen Lösungen von ξ, η wie folgt:

$$\xi = f(x + 2\sqrt{y}),\ \ \eta = g(x - 2\sqrt{y})$$

Wir setzen der Einfachheit zu Liebe

$$\xi = x + 2\sqrt{y},\ \ \eta = x - 2\sqrt{y}$$

In den neuen Koordinaten ausgedrügt ergibt sich die PDG

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi} \cdot \left[a_{11}\frac{\partial\eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial\xi}{\partial x} + a_{22}\frac{\partial\eta}{\partial y} \cdot \frac{\partial\xi}{\partial y}\right] + \frac{\partial u}{\partial\xi} \cdot \left[a_{11}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + a_{22}\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}\right] + \frac{\partial u}{\partial\eta} \cdot \left[a_{11}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + a_{22}\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}\right]$$

$$= 4\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi} + \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial\eta} - \frac{\partial u}{\partial\xi}\right) = 4\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi} + \frac{2}{\xi - \eta} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial\eta} - \frac{\partial u}{\partial\xi}\right) = 0$$

b) Analog zu vorhin führen wir zur Lösung der PDG

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

neue Koordinaten

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi(x,y) \\ \eta(x,y) \end{pmatrix}$$

ein, die die Gleichungen

$$\xi_x - \lambda_1\xi_y = 0 \quad , \quad \eta_x - \lambda_2\eta_y = 0$$

erfüllen, wobei $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1$ die Lösungen der Gleichung

$$a_{11}\lambda^2 + 2a_{12}\lambda + a_{22} = \lambda^2 - 1 = 0$$

sind. Die Charakteristiken der beiden neuen DGL für ξ und η sind gegeben durch

$$-\lambda_i = y_i' \ \rightarrow\ y_1 = -x,\ y_2 = x$$

und demnach die entsprechenden Lösungen:

$$\xi(x,y) = f(y + x), \quad \eta(x,y) = g(y - x)$$

Wir setzen

$$\xi = x + y,\ \ \eta = x - y$$

Die den neuen Koordinaten ξ und η entsprechende PDG lautet jetzt

$$0 = 2\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi} \cdot \left[a_{11}\frac{\partial\eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial\xi}{\partial x} + a_{22}\frac{\partial\eta}{\partial y} \cdot \frac{\partial\xi}{\partial y}\right] + \frac{\partial u}{\partial\xi} \cdot \left[a_{11}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + a_{22}\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}\right] + \frac{\partial u}{\partial\eta} \cdot \left[a_{11}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + a_{22}\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}\right]$$

$$= 4\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi}$$

Also:

$$\frac{\partial u}{\partial\xi} = h(\xi) \ \rightarrow\ u = \int h(\xi)\ d\xi + \mathcal{G}(\eta)$$

Demnach ergibt sich die allgemeine Lösung der DGL als

$$\boxed{u(x,y) = \mathcal{H}(y + x) + \mathcal{G}(y - x)}$$