Übungen zur Vorlesung Analysis III (WS 07/08)

9. Übungsserie

1.* Lösen Sie die partielle Differentialgleichung

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y^2\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \ .$$

2. Klassifizieren Sie die folgenden partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung

a)* $u_{xx} + xyu_{yy} = 0$

b) $\sin^2 x \cdot e^y u_{xx} + 2e^y u_{xy} + 2e^y u_{yy} + \tan x = 0$

3. Gegeben sei der Differentialausdruck

$$L[u] = a_{11}(x,y)u_{xx} + 2a_{12}(x,y)u_{xy} + a_{22}(x,y)u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu$$

In vielen Fällen gelingt die Lösung durch eine vorbereitende Transformation der unabhängigen Variablen $\xi = \varphi(x,y) \qquad \eta = \psi(x,y)$.

a) Stellen Sie $L[u]$ mit den Ableitungen nach ξ und η dar. Die Lösung sollte die Struktur

$$L[u] = \alpha_{11}u_{\xi\xi} + 2\alpha_{12}u_{\xi\eta} + \alpha_{22}u_{\eta\eta} + F(u_\xi, u_\eta, u, \xi, \eta)$$

haben.

b) Wenn Sie richtig gerechnet haben, sollte

$$\begin{aligned}\alpha_{11} &= a_{11}\varphi_x^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}\varphi_y^2\\ \alpha_{12} &= a_{11}\varphi_x\psi_y + a_{12}(\varphi_x\psi_y + \varphi_y\psi_x) + a_{22}\varphi_y\psi_y\\ \alpha_{22} &= a_{11}\psi_x^2 + 2a_{12}\psi_x\psi_y + a_{22}\psi_y^2\end{aligned}$$

Geben Sie Bedingungen dafür an, dass es gelingt durch geeignete Wahl von φ und ψ α_{11} uns α_{22} zum Verschwinden zu bringen. Welcher Typ Gleichung liegt dann vor?

c) Ihre Überlegungen zu b) sollen ergeben haben, dass die Gleichung $a_{11}\lambda^2 + 2a_{12}\lambda + a_{22} = 0$ zwei verschiedene Nullstellen haben sollte, d.h.

$$a_{11}\lambda^2 + 2a_{12}\lambda + a_{22} = a_{11}(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2).$$

Dann wählt man φ und ψ so, dass

$$\begin{aligned} &\varphi_x - \lambda_1\varphi_y = 0\\ \text{und}\quad &\psi_x - \lambda_2\psi_y = 0\,.\end{aligned}$$

Hinweis: Charakteristiken

4. Führen Sie das Programm von 3. für die Gleichungen

a) $u_{xx} - yu_{yy} = 0$,

b) $u_{xx} - u_{yy} = 0$

durch und geben Sie die allgemeine Lösung für den Fall b) an.

Es wird empfohlen, alle mit * gekennzeichneten Aufgaben schriftlich zu bearbeiten und in den Übungen in der Woche vom 17.12. bis 21.12.2007 abzugeben.