Übungen zur Vorlesung Analysis III (WS 07/08)

8. Übungsserie

0. Gegenstand dieser Serie ist die Gleichung $\Delta u = 0$ und ihre Lösungen (harmonische Funktionen). Wiederholen Sie dazu die Aufgaben 2.) bis 4.) der 5. Übungsserie aus Analysis II und überprüfen Sie, dass für

$$U(r,\varphi,z) = u(r\cdot\cos\varphi,\ r\sin\varphi, z) = u(x,y,z)$$

die Formel $\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$ (Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten) gilt.

1. Sei $\Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Geben Sie alle harmonischen Polynome an mit einem Grad kleiner oder gleich 2.

2.* Geben Sie für $\Delta_2 u$ alle radialsymmetrischen harmonischen Funktionen an. (vergl. Aufgabe 3 aus der 5. Übungsserie Analysis II).

3. Machen Sie für $u(x,y)$ den Ansatz $u(x,y) = f(x)\cdot g(y)$.
Sortieren Sie in $\Delta_2(f\cdot g)$ nach den jeweiligen Variablen und schließen Sie über die Abhängigkeiten von x und y auf die Größe der entstehenden Quotienten, lösen Sie die Differentialgleichungen und gewinnen Sie u.

4. Wiederholen Sie die Vorgehensweise der Aufgabe 3.) für die Gleichung $\Box u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

5. Sei $u = u(x_1,\ldots,x_n) = u(\vec{x})$ eine harmonische Funktion. Untersuchen Sie welcher der angegebenen Ausdrücke wieder zu einer harmonischen Funktion führt.

a) $u(\vec{x}+\vec{h})$ — $\vec{h}$ konstanter Vektor

b) $u(\lambda\vec{x})$ — $\lambda \in \mathbb{R}$

c) $u(C\vec{x})$ — C orthogonale Matrix

d) $\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2}$ — $n=2$

e) $\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2}$ — $n>2$

f) $x_1\frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial u}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial u}{\partial x_3}$ — $n=3$

g) $x_1\frac{\partial u}{\partial x_1} - x_2\frac{\partial u}{\partial x_2}$ — $n=2$

h) $x_2\frac{\partial u}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial u}{\partial x_2}$ — $n=2$

i) $\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2$ — $n=2$

j) $\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2$ — $n=2$

Es wird empfohlen, alle mit * gekennzeichneten Aufgaben schriftlich zu bearbeiten und in den Übungen in der Woche vom 10.12. bis 14.12.2007 abzugeben.