Analysis III
FSU Jena - WS 07/08
Serie 07 - Lösungen

Stilianos Louca

3. Dezember 2007

Aufgabe 01

Siehe Serie 06, Aufgabe 5.

Aufgabe 02

Siehe Serie 06, Aufgabe 6.

Aufgabe 03

a)

$$0 = \operatorname{div} \vec{F}(\vec{r}) = \operatorname{div}(f(r)\vec{r}) = f(r) \cdot \operatorname{div} \vec{r} + \vec{r} \cdot \operatorname{grad} f(r) = 3f(\vec{r}) + x^i \frac{\partial f}{\partial x_i}(r)$$

$$\to \; 3f(\vec{r}) = -f'(\vec{r}) \cdot \vec{r} = -f'(\vec{r}) \cdot \vec{e}_\rho \cdot r = -r\frac{\partial f}{\partial r} \overset{*}{=} -r \cdot \frac{df}{dr}, \quad (*) : f(\vec{r}) = f(r)$$

$$\to \int \frac{df}{f} = -\int \frac{3dr}{r} \;\rightsquigarrow\; f(r) = \frac{A}{r^3}, \; A \in \mathbb{R}$$

Demnach muss für das -2 homogene Feld $\vec{F}$ gelten

$$\boxed{\vec{F} = \frac{A \cdot \vec{r}}{r^3}, \; A \in \mathbb{R}}$$

b) Unabhängig vom oberen Spezialfall, gilt

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \operatorname{rot}(f(r) \cdot \vec{r}) = f(r) \underbrace{\operatorname{rot} \vec{r}}_{0} - \vec{r} \times \operatorname{grad} f(r) = -\vec{r} \times \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\vec{e}_i\right) = -\vec{r} \times \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \vec{e}_\rho = -r\frac{\partial f}{\partial r} \cdot \vec{e}_\rho \times \vec{e}_\rho = 0$$

Jedes radialsymmetrische Vektorfeld ist also Wirbelfrei!

Aufgabe 04

a) Ansatz: $\vec{F}_1 = \operatorname{grad} U$, wobei

$$U(x,y,z) := \int_0^x F_1^x(\xi,0,0)\; d\xi + \int_0^y F_1^y(x,\xi,0)\; d\xi + \int_0^z F_1^z(x,y,\xi)\; d\xi$$

$$= \int_0^x \xi \; d\xi + \int_0^y -\xi \; d\xi + \int_0^z (x-y) \; d\xi = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + (x-y)z$$

Durch direktes Ausrechnen zeigt sich: $\operatorname{grad} U = \vec{F}_1 \quad \square$

b) Es gilt

$$\operatorname{rot} \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} x \sin z - e^x \\ -y \sin z \\ z e^x - x^2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

woraus sich ergibt dass es kein Skalarfeld $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gibt, mit $\operatorname{grad} U = \vec{F}_2$, da sonst $\operatorname{rot} \vec{F}_2 = \operatorname{rot} \operatorname{grad} U = 0$ sein müsste!

c) Sei $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ein Potentialfeld von $\vec{F}_3$. Dann gilt:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2x \;\to\; U = \int 2x \; dx = x^2 + f(y,z), \;\; f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$\to\; \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} \overset{!}{=} 0 \;\to\; f = f(z)$$

$$\to\; \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{df}{dz} \overset{!}{=} -1 \;\to\; f = \int -dz = -z \;\to\; U = x^2 - z$$

Durch direktes Ausrechnen zeigt sich dass $\operatorname{grad} U = \vec{F}_3$ gilt. $\square$

Aufgabe 05

Wir berechnen Divergenz und Rotation

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial F^i}{\partial x_i} = 2y - 2y = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{pmatrix} x+1 \\ -y \\ -2x \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

und sehen dass es zwar ein Vektorpotential $\vec{A}$ jedoch kein skalares Potential gibt. Wir machen den Ansatz

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} \int_0^z F^y(x,y,t) \; dt \\ \\ -\int_0^z F^x(x,y,t) \; dt + \int_0^x F^z(t,y,0) \; dt \\ \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{z^2}{2} - y^2 z \\ -2xyz + \frac{x^2 y}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Durch direktes Ausrechnen zeigt sich dass $\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{F}$ ist.