Analysis III
FSU Jena - WS 07/08
Serie 06 - Lösungen

Stilianos Louca

1. März 2008

Aufgabe 01

Bemerkung: Es gelte die Einsteinsche Summenkonvention, d.h über zwei gleiche Indizes die jeweils oben und unten auftauchen wird von 1 bis 3 aufsummiert! Dabei sei ε_{ijk} das Levi-Chivita Symbol.

a)

$$\operatorname{div}\left(f\vec{F}\right) = \operatorname{div}\left(fF^i\vec{e}_i\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(fF^i\vec{e}_i\right)_j = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(fF^j\right) = \frac{\partial f}{\partial x_j}\cdot F^j + \frac{\partial F^j}{\partial x_j}\cdot f = \vec{F}\cdot\operatorname{grad} f + f\cdot\operatorname{div}\vec{F}$$

b)

$$\operatorname{div}\left(\vec{F}_1\times\vec{F}_2\right) = \frac{\partial}{\partial x_l}\left(F_1^iF_2^j\varepsilon_{ijk}\cdot\vec{e}_k\right)_l = \frac{\partial}{\partial x_l}\left(F_1^iF_2^j\varepsilon_{ijl}\right) = F_2^j\varepsilon_{ijl}\frac{\partial F_1^i}{\partial x_l} + F_1^i\varepsilon_{ijl}\frac{\partial F_2^j}{\partial x_l}$$

$$= -F_1^i\left(\varepsilon_{lji}\frac{\partial F_2^j}{\partial x_l}\right) + F_2^j\left(\varepsilon_{lij}\frac{\partial F_1^i}{\partial x_l}\right) = -F_1^i\left(\operatorname{rot}\vec{F}_2\right)_i + F_2^j\left(\operatorname{rot}\vec{F}_1\right)_j = -\vec{F}_1\cdot\operatorname{rot}\vec{F}_2 + \vec{F}_2\cdot\operatorname{rot}\vec{F}_1$$

c)

$$\operatorname{rot}\left(f\vec{F}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(fF^j\vec{e}_j\right)_l\varepsilon_{ilk}\cdot\vec{e}_k = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(fF^l\right)\varepsilon_{ilk}\cdot\vec{e}_k = f\cdot\frac{\partial F^l}{\partial x_i}\varepsilon_{ilk}\cdot\vec{e}_k + F^l\varepsilon_{ilk}\frac{\partial f}{\partial x_i}\vec{e}_k$$

$$= f\cdot\operatorname{rot}\vec{F} - F^l\varepsilon_{lik}\frac{\partial f}{\partial x_i}\vec{e}_k = f\cdot\operatorname{rot}\vec{F} - \vec{F}\times\operatorname{grad} f$$

d)

$$RHS:\ \operatorname{rot}\left(\vec{F}_1\times\vec{F}_1\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(F_1^lF_2^m\varepsilon_{lmk}\vec{e}_k\right)_j\varepsilon_{ijn}\cdot\vec{e}_n = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(F_1^lF_2^m\varepsilon_{lmj}\varepsilon_{ijn}\right)\cdot\vec{e}_n = \left(F_2^m\frac{\partial F_1^l}{\partial x_i} + F_1^l\frac{\partial_2^m}{\partial x_i}\right)\left(\delta_{ln}\delta_{mi} - \delta_{li}\delta_{mn}\right)\vec{e}_n$$

$$= \left(F_2^m\frac{\partial F_1^l}{\partial x_i}\delta_{ln}\delta_{mi} - F_2^m\frac{\partial F_1^l}{\partial x_i}\delta_{li}\delta_{mn} + F_1^l\frac{\partial F_2^m}{\partial x_i}\delta_{ln}\delta_{mi} - F_1^l\frac{\partial F_2^m}{\partial x_i}\delta_{li}\delta_{mn}\right)\vec{e}_n = \left(F_2^i\frac{\partial F_1^n}{\partial x_i} - F_2^n\frac{\partial F_1^i}{\partial x_i} + F_1^n\frac{\partial F_2^i}{\partial x_i} - F_1^i\frac{\partial F_2^n}{\partial x_i}\right)\vec{e}_n$$

$$= F_2^i\frac{\partial F_1^n}{\partial x_i}\vec{e}_n - F_1^i\frac{\partial F_2^n}{\partial x_i}\vec{e}_n + \frac{\partial F_2^i}{\partial x_i}F_1^n\vec{e}_n - \frac{\partial F_1^i}{\partial x_i}F_2^n\vec{e}_n = \left(F_2^i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\left(F_1^n\vec{e}_n\right) - \left(F_1^i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\left(F_2^n\vec{e}_n\right) + \frac{\partial F_2^i}{\partial x_i}F_1^n\vec{e}_n - \frac{\partial F_1^i}{\partial x_i}F_2^n\vec{e}_n$$

$$= \left(\vec{F}_2\operatorname{grad}\right)\vec{F}_1 - \left(\vec{F}_1\operatorname{grad}\right)\vec{F}_2 + \vec{F}_1\operatorname{div}\vec{F}_2 - \vec{F}_2\operatorname{div}\vec{F}_1 \quad \square$$

Aufgabe 02

Definieren $\vec{\varphi}^{\,i} := \varphi \cdot \vec{e}_i$ und schreiben

$$\int_{\partial A} \varphi \vec{t}\, ds = \int_{\partial A} \left(\varphi t^i \vec{e}_i\right)\, ds = \vec{e}_i \cdot \int_{\partial A} \left(\vec{\varphi}^{\,i} \cdot \vec{t}\right)\, ds = \vec{e}_i \cdot \int_{\partial A} \vec{\varphi}^{\,i}\, d\vec{s} = \vec{e}_i \cdot \int_A \operatorname{rot} \vec{\varphi}^{\,i} \cdot \vec{n}\, dA = \vec{e}_i \cdot \int_A \frac{\partial \varphi_j^i}{\partial x_l} \varepsilon_{ljk} \vec{n}\, dA$$

$$= \vec{e}_i \cdot \int_A \delta_j^i \frac{\partial \varphi}{\partial x_l} \varepsilon_{ljk} n_k\, dA = \vec{e}_j \cdot \int_A \frac{\partial \varphi}{\partial x_l} \varepsilon_{ljk} n_k\, dA = \int_A dA\, n_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_l} \varepsilon_{klj} \vec{e}_j = \int_A d\vec{A} \times \operatorname{grad} \varphi \quad \square$$

Aufgabe 03

a) Wir machen den Ansatz

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} \int_0^z F^y(x,y,t)\, dt \\ -\int_0^z F^x(x,y,t)\, dt + \int_0^x F^z(t,y,0)\, dt \\ 0 \end{pmatrix}$$

wobei wir durch $F^i(x,y,0)$ eine nur von (x,y) abhängige Funktion meinen bei $z = 0$.
Wir zeigen dass $\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{F}$ gilt:

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \begin{pmatrix} -\partial_z A^y \\ \partial_z A^x \\ \partial_x A^y - \partial_y A^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_z \int_0^z F^x(x,y,t)\, dt - \partial_z \int_0^x F^z(t,y,0)\, dt \\ \partial_z \int_0^z F^y(x,y,t)\, dt \\ -\int_0^z \left(\partial_x F^x(x,y,t) + \partial_y F^y(x,y,t)\right)\, dt + \partial_x \int_0^x F^z(t,y,0)\, dt \end{pmatrix}$$

$$\overset{*}{=} \begin{pmatrix} F^x(x,y,z) \\ F^y(x,y,z) \\ \int_0^z \partial_z F^z(x,y,t)\, dt + F^z(x,y,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F^x \\ F^y \\ F^z \end{pmatrix} = \vec{F} \quad \square$$

(*) Mittelwertsatz der Integralrechnung & $\operatorname{div} \vec{F} = 0$.

Wie man auf den Ansatz kommt: Suchen Vektorfeld $\vec{A} = A^x \vec{e}_x + A^y \vec{e}_y$ so dass

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \begin{pmatrix} -\partial_z A^y \\ \partial_z A^x \\ \partial_x A^y - \partial_y A^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F^x \\ F^y \\ F^z \end{pmatrix}$$

ist. Durch Komponentenvergleich in x und y kommt man auf die Notwendigkeit

$$A^y(x,y,z) = -\int F^x(x,y,z)\, dz \cong -\int_0^z F^x(x,y,t)\, dt + h(x,y)$$

$$A^x(x,y,z) = \int F^y(x,y,z)\, dz \cong \int_0^z F^y(x,y,t)\, dt + g(x,y)$$

wobei g und h noch beliebig sind. Vergleich mit der 3. Komponente ergibt ferner

$$\partial_x A^y - \partial_y A^x = -\int\limits_0^z \left[\partial_x F^x(x,y,t) + \partial_y F^y(x,y,t)\right]\, dt + \partial_x h(x,y) - \partial_y g(x,y)$$

$$\overset{\operatorname{div}\vec{F}=0}{=} \int\limits_0^z \partial_t F^z(x,y,t)\, dt + \partial_x h(x,y) - \partial_y g(x,y) = F^z(x,y,z) - F^z(x,y,0) + \partial_x h(x,y) - \partial_y g(x,y) \overset{!}{=} F^z(x,y,z)$$

$$\rightarrow\ \partial_x h(x,y) - \partial_y g(x,y) = F^z(x,y,0)$$

Da wir anscheinend noch eine Menge Freiheit haben, setzen wir $g \equiv 0$ und erhalten für h

$$h(x,y) = \int F^z(x,y,0)\, dx$$

Somit sind alle 3. Gleichungen erfüllt, und es ist $\operatorname{rot}\vec{A} = \vec{F}$. $\square$

b)

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \operatorname{rot}\int_0^1 t\left(\vec{F}(t\vec{r}) \times \vec{r}\right)\, dt = \int_0^1 t \operatorname{rot}\left(\vec{F}(t\vec{r}) \times \vec{r}\right)\, dt$$

$$= \int_0^1 t\left[(\vec{r}\operatorname{grad})\,\vec{F}(t\vec{r}) - \left(\vec{F}(t\vec{r})\operatorname{grad}\right)\vec{r} + \vec{F}(t\vec{r})\operatorname{div}\vec{r} - \vec{r}\operatorname{div}\vec{F}(t\vec{r})\right]\, dt$$

$$= \int_0^1 t\left\{\begin{pmatrix} x\partial_x F^x + y\partial_y F^x + z\partial_z F^x \\ x\partial_x F^y + y\partial_y F^y + z\partial_z F^y \\ x\partial_x F^z + y\partial_y F^z + z\partial_z F^z \end{pmatrix}(t\vec{r}) + 2\vec{F}(t\vec{r})\right\}\, dt = \int_0^1 t\left[\frac{\partial\vec{F}(t\vec{r})}{\partial\vec{r}}\vec{r} + 2\vec{F}(t\vec{r})\right]\, dt$$

$$= \int_0^1 t\left[\frac{\partial\vec{F}(t\vec{r})}{\partial(t\vec{r})}\frac{\partial(t\vec{r})}{\partial\vec{r}}\vec{r} + 2\vec{F}(t\vec{r})\right]\, dt = \int_0^1 t\left[\frac{\partial\vec{F}(t\vec{r})}{\partial(t\vec{r})}t\vec{r} + 2\vec{F}(t\vec{r})\right]\, dt = \int_0^1 t\left[t\frac{\partial\vec{F}(t\vec{r})}{\partial t} + 2\vec{F}(t\vec{r})\right]\, dt$$

$$= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\left(t^2\vec{F}(t\vec{r})\right)\, dt = \left[t^2\vec{F}(t\vec{r})\right]_0^1 = \vec{F}(\vec{r}) \quad \square$$

Aufgabe 04

a)

$$\int_K \vec{F}(\vec{r}) \times d\vec{s} = \int_K \vec{F}(\vec{r}) \times \vec{t}(\vec{r})\, ds = \vec{e}_i \cdot \int_K \underbrace{\left[\vec{F}(\vec{r}) \times \vec{t}(\vec{r})\right]^i}_{f^i(\vec{r})}\, ds = \vec{e}_i \cdot \int_K f^i(\vec{r})\, ds = \vec{e}_i \cdot \int_a^b f^i(\gamma(t)) \cdot \|\dot{\gamma}(t)\|\, dt$$

$$= \vec{e}_i \cdot \int_a^b \left[\vec{F}(\gamma(t)) \times \underbrace{\vec{t}(\gamma(t)) \cdot \|\dot{\gamma}(t)\|}_{\dot{\gamma}(t)}\right]_i\, dt = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \times \dot{\gamma}(t)\, dt \quad \square$$

b) Sei o.B.d.A der Leiter beschrieben durch $\vec{r}(t) = t \cdot \vec{e}_z,\ t \in (-\infty, \infty)$ und $\vec{y} = r \cdot \vec{e}_x$

$$\vec{H}\,(\vec{y}) = \frac{1}{4\pi} \int_K \frac{(\vec{x} - \vec{y})}{\|\vec{x} - \vec{y}\|^3} \times d\vec{s}_{\vec{x}} = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(t\vec{e}_z - r\vec{e}_x)}{\|t\vec{e}_z - r\vec{e}_x\|^3} \times t\vec{e}_z = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(t\vec{e}_z - r\vec{e}_x)}{(t^2 + r^2)^{3/2}} \times \vec{e}_z \; dt$$

$$= \frac{r\vec{e}_y}{4\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{(t^2 + r^2)^{3/2}} dt$$

Wir substituieren

$$t = r \tan \vartheta \;\rightarrow\; dt = \frac{r}{\cos^2 \vartheta}\, d\vartheta,\; t^2 + r^2 = \frac{r^2}{\cos^2 \vartheta}$$

und bekommen

$$\vec{H}(r\vec{e}_x) = \frac{1}{4r\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \vartheta \; d\vartheta = \frac{\vec{e}_y}{2\pi r}$$

Aufgrund der Symmetrie des Feldes allgemein in Zylinderkoordinaten:

$$\vec{H}(\rho, \varphi, z) = \frac{1}{2\pi\rho} \cdot \vec{e}_\varphi$$

Aufgabe 05

Die DGL

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi_1 = \Delta\Phi_1 = \operatorname{div} \vec{A}$$

hat immer eine Lösung. Nennen $\vec{A}_1 := \operatorname{grad} \Phi_1$. Somit ist $\vec{A}_1$ ein Gradientenfeld. Nennen: $\vec{A}_2 := \vec{A} - \vec{A}_1$. Somit ist $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$ und es gilt

$$\operatorname{div} \vec{A}_2 = \operatorname{div} \vec{A} - \operatorname{div} \vec{A}_1 = \operatorname{div} \vec{A}_1 - \operatorname{div} \vec{A}_1 = 0$$

Somit ist $\vec{A}_2$ quellenfrei und ferner ein Wirbelfeld. $\square$

Aufgabe 06

Gesucht ist unter Anderem ein Feld $\vec{A}$, so dass $\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{F}$. Das bedeutet aber

$$0 = \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{div} \vec{F}$$

was eine Voraussetzung für die Lösbarkeit darstellt. Unter dieser Vorraussetzung kann die DGL

$$\operatorname{rot} \vec{C} = \vec{F}$$

laut Aufgabe 03a gelöst werden. Dann hat auch die DGL

$$\Delta\varphi = f - \operatorname{div} \vec{C}$$

eine Lösung. Wir nennen

$$\vec{A} := \operatorname{grad} \varphi + \vec{C}$$

was eine Lösung darstellt, da

$$\operatorname{div} \vec{A} = \Delta\varphi + \operatorname{div} \vec{C} = f, \quad \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{rot} \vec{C} = \vec{F} \quad \square$$