Übungen zur Vorlesung Analysis III (WS 07/08)

6. Übungsserie

1.* Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln für die Differentialoperatoren der mathematischen Physik (Die Differenzierbarkeit wird vorausgesetzt.).

a) $\operatorname{div}(f\vec{F}) = f \operatorname{div}\vec{F} + \vec{F} \cdot \operatorname{grad} f$

b) $\operatorname{div}(\vec{F}_1 \times \vec{F}_1) = -\vec{F}_1 \cdot \operatorname{rot}\vec{F}_2 + \vec{F}_2 \cdot \operatorname{rot}\vec{F}_1$

c) $\operatorname{rot}(f\vec{F}) = f \operatorname{rot}\vec{F} - \vec{F} \times \operatorname{grad} f$

d) $\operatorname{rot}(\vec{F} \times \vec{F}_2) = (\vec{F}_2 \operatorname{grad})\vec{F}_1 - (\vec{F}_1 \operatorname{grad})\vec{F}_2 + \vec{F}_1 \operatorname{div}\vec{F}_2 - \vec{F}_2 \operatorname{div}\vec{F}_1$,

wobei $(\vec{a} \operatorname{grad})\vec{b} = \left(a_1\frac{\partial}{\partial x} + a_2\frac{\partial}{\partial y} + a_3\frac{\partial}{\partial z}\right)\vec{b}$.

2. Beweisen Sie aus dem Stockesschen Satz $\int\limits_{\partial A} \vec{F}d\vec{s} = \iint\limits_{A} \operatorname{rot}\vec{F}d\vec{o}$ die grad-Form $\int\limits_{\partial A} \varphi d\vec{s} := \int\limits_{\partial A} \varphi\vec{t}\, ds = \iint\limits_{A} d\vec{o} \times \operatorname{grad}\varphi$.

3. Es sei $\vec{F}$ ein differenzierbares Vektorfeld mit $\operatorname{div}\vec{F} = 0$.

a)* Zeigen Sie, dass es ein Vektorpotential $\vec{A}$ gibt mit $\vec{F} = \operatorname{rot}\vec{A}$.
<u>Hinweis:</u> Es genügt ein Vektorpotential $\vec{A}$ zu suchen, dessen 3. Komponente verschwindet.

b) Zeigen Sie, dass

$$\vec{A}(\vec{r}) = \int_0^1 t(\vec{F}(t\cdot\vec{r}) \times \vec{r})dt$$

ein Vektorpotential ist.

4. Auch für die Kurvenintegrale kann durch $\int\limits_K \vec{F} \times d\vec{s}$ ein Integral über einen Vektor definiert werden.

a) Sei $\gamma(t)$ eine differenzierbare Parameterdarstellung der Kurve K $(t \in [a,b])$. Dann gilt

$$\int_K \vec{F} \times d\vec{s} = \int_a^b (F(\gamma(t)) \times \dot{\gamma}(t))dt \ .$$

b) $\vec{H}(\vec{y}) = \dfrac{I}{4\pi} \int\limits_K \dfrac{(\vec{x}-\vec{y})}{\|\vec{x}-\vec{y}\|^3} \times \vec{ds}_{\vec{x}}$ ist die magnetische Feldstärke im Punkt $\vec{y}$ eines Leiters (beschrieben durch die Kurven K), der von dem konstanten Strom I durchflossen wird.
Berechnen Sie die Feldstärke eines unendlichen langen geradlinigen Leiters.
Bemerkung: Physiker wissen, weshalb dieses Integral manchmal Biot-Savart-Integral heißt.

5. Zeigen Sie, dass man jedes stetig differenzierbare Vektorfeld $\vec{A}$ als Summe eines Gradientenfeldes und eines Vektorpotentialfeldes (Wirbelfeld) darstellen kann, d.h. $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$ mit $\operatorname{rot} \vec{A}_1 = 0$ und $\operatorname{div} A_2 = 0$.
Hinweis: Die Differentialgleichung $\Delta\Phi = \mu$ hat immer eine Lösung.

6. Seien $f(I\!R^3 \to I\!R)$ und $\vec{F}(I\!R^3 \to I\!R^3)$ gegeben.
Konstruieren Sie ein stetig differenzierbares Vektorfeld $\vec{A}$ aus

$$\operatorname{div} \vec{A} = f \quad \text{und} \quad \operatorname{rot} \vec{A} = \vec{F} \ .$$

Geben Sie eine notwendige Lösbarkeitsbedingung für $\vec{F}$ an.
Hinweis: siehe Aufgabe 5

Es wird empfohlen, alle mit * gekennzeichneten Aufgaben schriftlich zu bearbeiten und in den Übungen in der Woche vom 26.11. bis 30.11.2007 abzugeben.