Analysis III
FSU Jena - WS 07/08
Serie 05 - Lösungen

Stilianos Louca

29. Februar 2008

Aufgabe 01

$$\vec{F} = \vec{r},\ K(R) := \left\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq R^2\right\}$$

$$\Rightarrow \int\limits_{\partial K(R)} \vec{F}\cdot d\vec{A} = \int\limits_{K(R)} \operatorname{div}\vec{F}\cdot dV = \int\limits_{K(R)} \operatorname{div}\vec{r}\cdot dV = 3\int\limits_{K(R)} dV = 4\pi R^3$$

Aufgabe 02

Verwenden Kugelkoordinaten (ρ,ϑ,φ) für die gekrümmte Fläche und Zylinderkoordinaten (ρ,φ,z) für die obere Kreisfläche. Die Fläche ist gegeben durch

$$F = \left\{(x,y,z) : (\rho = 1\ \wedge\ z \leq 0)\ \vee\ \left(z = 0\ \wedge\ x^2+y^2 \leq 1\right)\right\} = \partial V,\ V := \{(x,y,z) : (\rho \leq 1)\ \wedge\ (z \leq 0)\}$$

a) Durch direktes Ausrechnen ergibt sich:

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho^2\sin\vartheta\cos\vartheta\sin\varphi \\ \rho^2\sin\vartheta\cos\vartheta\cos\varphi \\ \rho^2\sin^2\vartheta\cos\varphi\sin\varphi \end{pmatrix}\ bzw.\ \vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho^2\sin\varphi\cos\varphi \end{pmatrix} : z = 0$$

$$\int\limits_{\partial K(1)} \vec{f}\cdot d\vec{A} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\cos\vartheta\cos\varphi \\ \sin^2\vartheta\cos\varphi\sin\varphi \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}\sin\vartheta\ d\varphi\ d\vartheta$$

$$= \left[\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^3\vartheta\cos\vartheta\ d\vartheta\right]\cdot\underbrace{\left[\int_0^{2\pi}(\sin 2\varphi + \sin\varphi)\ d\varphi\right]}_{0} = 0$$

b) Mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes hat man

$$\int_{\partial K(1)} \vec{f}\ d\vec{A} = \int_{\partial V}\vec{f}\cdot d\vec{A} - \int_0^{2\pi}\int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho^2\cos\varphi\sin\varphi \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\rho\ d\rho\ d\varphi$$

$$= \int_V \operatorname{div}\vec{f}\cdot dV - \left[\int_0^1\rho^3\ d\rho\right]\cdot\underbrace{\left[\int_0^{2\pi}\cos\varphi\sin\varphi\ d\varphi\right]}_{0}$$

$$= \int_V\left(\frac{\partial(yz)}{\partial x} + \frac{\partial(xz)}{\partial y} + \frac{\partial(xy)}{\partial z}\right)\ dV = \int_V 0\ dV = 0$$

Aufgabe 03

Verwenden Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) und schreiben die Fläche als

$$F = \left\{ \vec{r} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ \rho^2\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) \end{pmatrix} : \rho \in [0, a],\ \ \varphi \in [0, 2\pi] \right\}$$

Das Flächenelement ist gegeben durch

$$d\vec{A} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho} \times \frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ \cos^2\varphi - \sin^2\varphi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\rho\sin\varphi \\ \rho\cos\varphi \\ -4\rho^2\cos\varphi\sin\varphi \end{pmatrix} \ d\rho\ d\varphi$$

$$= \begin{pmatrix} -\rho\cos\varphi\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) - 4\rho^2\sin^2\varphi\cos\varphi \\ -\rho\sin\varphi\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) + 4\rho^2\sin\varphi\cos^2\varphi \\ \rho \end{pmatrix} \ d\rho\ d\varphi$$

Somit ergibt das Oberflächenintegral

$$\int_F \operatorname{rot}\vec{f}\cdot d\vec{A} = \int_0^a \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\rho\cos\varphi\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) - 4\rho^2\sin^2\varphi\cos\varphi \\ -\rho\sin\varphi\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) + 4\rho^2\sin\varphi\cos^2\varphi \\ \rho \end{pmatrix} \ d\varphi\ d\rho$$

$$= \int_0^a \int_0^{2\pi} \left\{\cos\varphi\sin\varphi\left(\cos\varphi - \sin\varphi\right)\cdot\left(4\rho^2 - \rho\right) + \rho\left(1 + \sin^3\varphi - \cos^3\varphi\right)\right\} \ d\varphi\ d\rho$$

$$= \left[\int_0^a \left(4\rho^2 - \rho\right)\right] \cdot \underbrace{\left[\int_0^{2\pi} \left(\cos\varphi - \sin\varphi\right)\cos\varphi\sin\varphi\ d\varphi\right]}_{0} + \left[\int_0^a \rho\ d\rho\right] \cdot \underbrace{\left[\int_0^{2\pi} \left(1 + \sin^3\varphi - \cos^3\varphi\right) d\varphi\right]}_{2\pi}$$

$$= \pi a^2$$

und das Wegintegral

$$\int_0^{2\pi} \vec{f}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\ d\varphi = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \rho^2\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) \\ \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\rho\sin\varphi \\ \rho\cos\varphi \\ -4\rho^2\cos\varphi\sin\varphi \end{pmatrix} \ d\varphi \ \ \big| \ \ \rho = a$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[-a^3\sin\varphi\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) + a^2\cos^2\varphi - 4a^3\cos\varphi\sin^2\varphi\right] \ d\varphi$$

$$= -a^3 \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} \left[\sin\varphi\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) + 4\cos\varphi\sin^2\varphi\right]}_{0} \ d\varphi + a^2 \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\ d\varphi = \pi a^2$$

Aufgabe 04

a) Seien $\vec{p_i} := p \cdot \vec{e_i}$ und $df_i := d\vec{f} \cdot \vec{e_i}$ wobei $\vec{e_i}$ das i-te Standardbasiselement sein soll. Dann gilt

$$\int_{\partial V} p \; d\vec{f} = \int_{\partial V} p \cdot \left(\sum_{i=1}^{3} df_i \cdot \vec{e_i} \right) = \sum_{i=1}^{3} \left\{ \vec{e_i} \cdot \int_{\partial V} p \cdot df_i \right\} = \sum_{i=1}^{3} \left\{ \vec{e_i} \cdot \int_{\partial V} \vec{p_i} \cdot d\vec{f} \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \left\{ \vec{e_i} \cdot \int_V \operatorname{div} \vec{p_i} \; dV \right\} = \sum_{i=1}^{3} \left\{ \vec{e_i} \cdot \int_V \frac{\partial p}{\partial x_i} \; dV \right\} = \sum_{i=1}^{3} \int_V \frac{\partial p}{\partial x_i} \cdot \vec{e_i} \; dV = \int_V \operatorname{grad} p \; dV \quad \square$$

b) Sei $K_i := \vec{K} \cdot \vec{e_i}$. **Bemerkung:** Aus (a) sieht man dass

$$\int_{\partial V} p \; df_i = \int_V \frac{\partial p}{\partial x_i} dV$$

gilt. Kurz gesagt, ergibt sich

$$\int_{\partial V} \vec{K} \times d\vec{f} = \int_{\partial V} \begin{pmatrix} K_y \; df_z - K_z \; df_y \\ K_z \; df_x - K_x \; df_z \\ K_x \; df_y - K_y \; df_x \end{pmatrix} = -\int_{\partial V} \begin{pmatrix} K_z \; df_y - K_y \; df_z \\ K_x \; df_z - K_z \; df_x \\ K_y \; df_x - K_x \; df_y \end{pmatrix}$$

$$= -\int_V \begin{pmatrix} \partial_y K_z - \partial_z K_y \\ \partial_z K_x - \partial_x K_z \\ \partial_x K_y - \partial_x K_x \end{pmatrix} \; dV = -\int_V \operatorname{rot} \vec{K} \; dV \quad \square$$

Aufgabe 05

Sei $\vec{1} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Seien $\vec{N}(\vec{r})$ der Normalenvektor und $\vec{n}(\vec{r}) = \dfrac{\vec{N}(\vec{r})}{\left\| \vec{N}(\vec{r}) \right\|}$ der Normaleneinheitsvektor auf ∂V im Punkt $\vec{r}$. Die Funktion f, definiert auf ∂V, ergibt sich demnach als

$$f(\vec{r}) = \cos \left(\vec{n}(\vec{r}) \angle \vec{1} \right) = \frac{\vec{n}(\vec{r}) \cdot \vec{1}}{\| \vec{n}(\vec{r}) \| \cdot \left\| \vec{1} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \vec{n}(\vec{r}) \cdot \vec{1}$$

Durch Einsetzen ergibt sich

$$\int_{\partial V} f \; dA = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_{\partial V} \vec{1} \cdot \vec{n}(\vec{r}) \; dA = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_{\partial V} \vec{1} \; d\vec{A} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_V \operatorname{div} \vec{1} \; dV' = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_V 0 \; dV = 0 \quad \square$$