Übungen zur Vorlesung Analysis III (WS 07/08)

5. Übungsserie

1.* Berechnen Sie das Integral aus Aufgabe 6* der 4. Serie mit einem Integralsatz.

2. Berechnen Sie das Integral $\int\limits_F \vec{f}\vec{do}$ mit dem Integranden $\vec{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$ über die innere Seite der unteren Halbkugelfläche
$F = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 1,\ z \le 0\}$

a) direkt,

b) unter Zuhilfenahme des Integralsatzes von Gauß.

3. "Bestätigen" Sie den Integralsatz von Stokes für die Vektorfunktion
$\vec{f} = \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix}$ auf der Fläche $z = x^2 - y^2,\ x^2+y^2 \le a^2$.

4. Für die folgenden Integrale gilt, dass ein Integral über einen Vektor komponentenweise ausgeführt wird.

a) Es sei p eine stetig differenzierbare Funktion $(I\!R^3 \to I\!R)$.
Beweisen Sie, dass

$$\int\limits_{\partial V} p\,\vec{do} := \int\limits_{\partial V} (p\vec{\mathfrak{n}})do = \int\limits_V \operatorname{grad} p\ d(x,y,z)\ .$$

b) Es sei $\vec{K}$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld $(I\!R^3 \to I\!R^3)$.
Beweisen sie dass

$$\int\limits_{\partial V} \vec{K} \times \vec{do} := \int\limits_{\partial V} (\vec{K} \times \vec{\mathfrak{n}})do = -\int\limits_V \operatorname{rot} \vec{K}\ d(x,y,z)\ .$$

5. Es sei ∂V die glatte Oberfläche eines Körpers V in $I\!R^3$ und die Funktion f ordne jedem Punkt von ∂V den Kosinus des Winkels zu, den der Normalenvektor mit $(1,1,1)$ bildet.
Zeigen Sie, dass $\int\limits_{\partial V} f do = 0$.

Es wird empfohlen, alle mit * gekennzeichneten Aufgaben schriftlich zu bearbeiten und in den Übungen in der Woche vom 19.11. bis 23.11.2007 abzugeben.