Analysis III
FSU Jena - WS 07/08
Serie 04 - Lösungen

Stilianos Louca

1. März 2008

Aufgabe 01

Wir differenzieren

$$\vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$$

und bekommen

$$\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} \partial_u x \\ \partial_u y \\ \partial_u z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \partial_v x \\ \partial_v y \\ \partial_v z \end{pmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} \partial_u y \cdot \partial_v z - \partial_v y \cdot \partial_u z \\ \partial_u z \cdot \partial_v x - \partial_v z \cdot \partial_u x \\ \partial_u x \cdot \partial_v y - \partial_v x \cdot \partial_u y \end{pmatrix} \right\|^2$$

$$= (\partial_u x)^2 \cdot \left[(\partial_v y)^2 + (\partial_v z)^2 + (\partial_v x)^2 - (\partial_v x)^2 \right]$$

$$+ (\partial_u y)^2 \cdot \left[(\partial_v z)^2 + (\partial_v x)^2 + (\partial_v y)^2 - (\partial_v y)^2 \right]$$

$$+ (\partial_u z)^2 \cdot \left[(\partial_v x)^2 + (\partial_v y)^2 + (\partial_v z)^2 - (\partial_v z)^2 \right]$$

$$- 2\partial_u y \cdot \partial_v y \cdot \partial_u z \cdot \partial_v z - 2\partial_u z \cdot \partial_v z \cdot \partial_v x \cdot \partial_u x - 2\partial_u x \cdot \partial_v x \cdot \partial_v y \cdot \partial_u y$$

$$= \left[(\partial_u x)^2 + (\partial_u y)^2 + (\partial_u z)^2 \right] \cdot \left[(\partial_v x)^2 + (\partial_v y)^2 + (\partial_v z)^2 \right] - (\partial_u x \cdot \partial_v x + \partial_u y \cdot \partial_v y + \partial_u z \cdot \partial_v z)^2 = E \cdot G - F^2$$

$$\Rightarrow \quad \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| = \sqrt{E \cdot G - F^2} \quad \square$$

Variante:

$$\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| = \|\vec{r}_u\| \cdot \|\vec{r}_v\| \cdot \sin(\vec{r}_u \angle \vec{r}_v) = \|\vec{r}_u\| \cdot \|\vec{r}_v\| \cdot \sqrt{1 - \cos^2(\vec{r}_u \angle \vec{r}_v)} = \|\vec{r}_u\| \cdot \|\vec{r}_v\| \cdot \sqrt{1 - \frac{(\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v)^2}{\|\vec{r}_u\|^2 \cdot \|\vec{r}_v\|^2}}$$

$$= \sqrt{(\vec{r}_u)^2 (\vec{r}_v)^2 - (\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v)^2} = \sqrt{E \cdot G - F^2} \quad \square$$

Aufgabe 02

Die Fläche wird beschrieben durch

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 - (x+y)^2 \end{pmatrix}, \; x, y > 0, \; x + y < 1$$

Verwenden die *Juma*-Parametrisierung der Fläche $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$

$$\begin{pmatrix} uv \\ (1-u)v \\ 1-v^2 \end{pmatrix}, \ u, v \in [0, 1]$$

Das Flächenelement dA ist gegeben durch

$$dA = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| \ dv \ du = \left\| \begin{pmatrix} v \\ -v \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u \\ 1-u \\ -2v \end{pmatrix} \right\| \ dv \ du = \left\| \begin{pmatrix} 2v^2 \\ 2v^2 \\ v \end{pmatrix} \right\| = v\sqrt{1+8v^2} \ dv \ du$$

Damit ergibt sich die Fläche als

$$A = \int_0^1 \int_0^1 v\sqrt{1+8v^2} \ dv \ du = \frac{1}{16} \cdot \int_0^1 16v\sqrt{8v^2+1} \ dv = \frac{1}{24} \cdot \left[\left(8v^2+1\right)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{13}{12}$$

Aufgabe 03

Verwenden Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) und beschreiben die Fläche durch

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos^2\varphi \\ R\cos\varphi\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}, \ \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \ \frac{\pi}{2} \right], \ z \in [-R\left|\sin\varphi\right|, \ R\left|\sin\varphi\right|]$$

Das Flächenelement ist gegeben durch

$$dA = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \right\| \ d\varphi \ dz = \left\| \begin{pmatrix} -R\sin 2\varphi \\ R\cos 2\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| \ d\varphi \ dz = R \ d\varphi \ dz$$

Daraus ergibt sich eine Fläche

$$A = 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{R\sin\varphi} R \ dz \ d\varphi = 4R^2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \ d\varphi = 4R^2$$

Aufgabe 04

Sei

$$\vec{r}_k(x) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \ y = f(x), f : [a, b] \to \mathbb{R}$$

eine $\mathcal{R}$ Integrierbare Kurve, und o.B.d.A $f(x) > 0 \ \forall \ x \in [a, b]$. Untersuchen die Mantelfläche des Körpers

$$K := \left\{ (x, y, z) : y^2 + z^2 \leq [f(x)]^2, \ x \in [a, b] \right\}$$

der durch die Rotation der Kurve um die X-Achse entsteht.
Sie ist gegeben durch

$$\vec{r}_{\partial k} = \begin{pmatrix} x \\ f(x)\cos\varphi \\ f(x)\sin\varphi \end{pmatrix}, \ x \in [a, b], \ \varphi \in [0, 2\pi]$$

Sei $\vec{r}_s = (x_s, y_s) \in \mathbb{R}$ der Schwerpunkt der Kurve definiert durch

$$\vec{r}_s := \frac{1}{L_k} \cdot \int_a^b \vec{r}(x) \cdot \left\| \frac{d\vec{r}_k}{dx} \right\| \ dx = \frac{1}{L_k} \cdot \int_0^b \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx} \right)^2} \ dx$$

wobei L_k die Länge der Kurve ist. Der bei der Rotation zurückgelegte Weg des Schwerpunktes hat eine Länge

$$L_s = 2\pi y_s = \frac{2\pi}{L_k} \cdot \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx} \right)^2} \ dx$$

Die Mandelfläche des Körpers ergibt sich als

$$A = \int_0^{2\pi} \int_a^b \left\| \frac{\partial \vec{r}_{\partial k}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \vec{r}_{\partial k}}{\partial x} \right\| \, dx \; d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_a^b \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -f \sin\varphi \\ f \cos\varphi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ f' \cos\varphi \\ f' \sin\varphi \end{pmatrix} \right\| \, dx \; d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_a^b f(x) \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx} \right)^2} \, dx \; d\varphi = 2\pi \cdot \int_0^b f(x) \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx} \right)^2} \, dx$$

$$= L_s \cdot L_k \quad \square$$

Aufgabe 05

Verwenden Kugelkoordinaten $(\rho, \vartheta, \varphi)$:

$$\iint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2=R^2 \\ z \geq 0}} (x+y+z) df = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (R \sin\vartheta \cos\varphi + R \sin\vartheta \sin\varphi + R \cos\vartheta) \, R^2 \sin\vartheta d\vartheta \; d\varphi$$

$$= R^3 \cdot \int_0^{2\pi} \left\{ (\cos\varphi + \sin\varphi) \cdot \left[\frac{\vartheta}{2} - \frac{\sin 2\vartheta}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[-\frac{1}{4} \cos 2\vartheta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \right\} d\varphi = R^3 \cdot \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} (\cos\varphi + \sin\varphi) \right] d\varphi = \pi R^3$$

Aufgabe 06

Verwenden wieder Kugelkoordinaten $(\rho, \vartheta, \varphi)$:

$$\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=R^2} \vec{F} \cdot d\vec{f} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} R \vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_\rho R^2 \sin\vartheta \; d\vartheta \; d\varphi = \pi R^3 \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi R^3$$

Variante:

$$\int\limits_{r=R} \vec{F} \; d\vec{f} = \int\limits_{r=R} \vec{r} \cdot \underbrace{\frac{\vec{r}}{r}}_{\vec{n}} \; df = \int\limits_{r=R} \frac{r^2}{r} \; df = R \underbrace{\int\limits_{r=R} df}_{4\pi R^2} = 4\pi R^3$$