Analysis III
FSU Jena - WS 07/08
Serie 03 - Lösungen

Stilianos Louca

5. November 2007

Aufgabe 01

$$\mu_{n+1}(B_t) = \int_{h_0}^{h} \mu_n(B_t)\ dt = \int_{h_0}^{h} \left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3\right)\ dt = \left[a_0 t + a_1 \frac{t^2}{2} + a_2 \frac{t^3}{3} + a_3 \frac{t^4}{4}\right]_{h_0}^{h}$$

$$= \frac{h-h_0}{6} \cdot \left[a_0 + a_1 h_0 + a_2 h_0^2 + a_3 h_0^3 + 4a_0 + 2a_1(h+h_0) + a_2(h+h_0)^2 + \frac{a_3}{2}(h+h_0)^3 + a_0 h + a_1 h + a_2 h^2 + a_3 h^3\right]$$

$$= \frac{h-h_0}{6} \cdot \left[\mu_n\left(B_{h_0}\right) + 4\mu_n\left(B_{\frac{h+h_0}{2}}\right) + \mu_n\left(B_h\right)\right]$$

Aufgabe 02

Wir wenden die Koordinatentransformation $(x,y) \leftrightarrow (u,v)$

$$y = ux^p,\ x = vy^{\frac{1}{q}} \ \Rightarrow\ \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^{\frac{q}{q-p}} \cdot u^{\frac{1}{q-p}} \\ u^{\frac{q}{q-p}} \cdot v^{-1} \end{pmatrix}$$

an. Die entsprechende Funktionaldeterminante $J(\vec{r})$ ist gegeben durch

$$J(\vec{r}) = \det(\vec{r}\ ') = -\frac{q}{q-p} \cdot u^{\frac{p+1}{q-p}} \cdot v^{\frac{p+1}{q-p}}$$

Wir können also die begrenzenden Kurven schreiben als

$$u \in [a,b],\ v \in \left[d^{-\frac{1}{q}},\ c^{-\frac{1}{q}}\right]$$

Daraus ergibt sich für die eingeschlossene Fläche A

$$A = \frac{q}{q-p} \cdot \int_a^b u^{\frac{p+1}{q-p}} du \int_{d^{-\frac{1}{q}}}^{c^{-\frac{1}{q}}} v^{\frac{p(q+1)}{q-p}} dv = \frac{q-p}{(q+1)(p+1)} \cdot \left(b^{\frac{q+1}{q-p}} - a^{\frac{q+1}{q-p}}\right) \cdot \left(c^{\frac{p+1}{p-q}} - d^{\frac{p+1}{p-q}}\right)$$

Aufgabe 03

a)

$$z = \cos x \cos y = \frac{1}{2} \cdot \left(\underbrace{\cos|x+y|}_{\geq 0} + \underbrace{\cos|x-y|}_{\geq 0} \right)$$

$$\rightarrow \; A = 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} \cos x \cos y \; dy \; dx = \pi$$

b) Verwenden Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z)

$$V = 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\cos\varphi}^{2\cos\varphi} \int_0^{\rho} \rho \; dz \; d\rho \; d\varphi = 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\cos\varphi}^{2\cos\varphi} \rho^2 \; d\rho \; d\varphi = \frac{28}{9}$$

c) Verwenden Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z)

$$V = 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \left(6 - \rho^2 - \rho\right) \rho \; d\rho \; d\varphi = \frac{32\pi}{3}$$

Aufgabe 04

Verwenden Kugelkoordinaten, setzen $R := \sqrt{2}$ und bezeichnen mit $\mathcal{Q}$, V, m jeweils die Dichte, das Volumen und Masse des Körpers.

$$J = 4\mathcal{Q} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\vartheta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R d\rho \; \rho^4 \sin^3\vartheta = \frac{2\pi R^5 \mathcal{Q}}{5} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 \; d\vartheta = \frac{2\pi R^5 \mathcal{Q}}{5} \cdot \left[\frac{\cos^3\vartheta}{3} - \cos\vartheta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi R^5 \mathcal{Q} \cdot (4\sqrt{2} - 5)}{15\sqrt{2}}$$

$$V = 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\vartheta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R d\rho \; \rho^2 \sin\vartheta = \frac{\sqrt{2}\pi R^3}{3} \cdot (\sqrt{2} - 1) \;\; \rightarrow \;\; \mathcal{Q} = \frac{3m}{\sqrt{2}\pi R^3(\sqrt{2} - 1)}$$

$$\Rightarrow \; J = \frac{mR^2(4\sqrt{2} - 5)}{10(\sqrt{2} - 1)} = \frac{m(4\sqrt{2} - 5)}{5(\sqrt{2} - 1)}$$

Aufgabe 05

Der Ausdruck

$$I := \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^\alpha} d(x, y, z)$$

konvergiert genau dann wenn für die Ausschöpfungsfolge $B_k := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \rho^2 := x^2 + y^2 + z^2 > \frac{1}{k^2}\right\}$ die Folge

$$I_k = \int_{B_k} \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^\alpha} d(x, y, z)$$

konvergiert. Wir verwenden Kugelkoordinaten und bekommen die Folge

$$a \neq \frac{3}{2} : \;\; I_k = \int_{1/k}^1 d\rho \; \rho^{2-2\alpha} \int_0^{2\pi} d\varphi \; \int_0^\pi d\vartheta \; \sin\vartheta = \frac{4\pi}{3 - 2\alpha} \cdot \left(1 - k^{2\alpha - 3}\right)$$

$$a = \frac{3}{2} : \;\; I_k = \int_{\frac{1}{k}}^1 \frac{d\rho}{\rho} = \ln k$$

die für $k \rightarrow \infty$ konvergiert genau dann wenn $\alpha < \dfrac{3}{2}$.

Aufgabe 06

Wir verwenden Polarkoordinaten (ρ, φ) und betrachten beliebige Ausschöpfungsfolge $B_n := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \rho^2 := x^2 + y^2 \in [\delta_n^2, 1]\big\}$ mit $\delta_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$$I_n = \int_{B_n} \ln(\sqrt{x^2+y^2})\ d(x,y) = \int_{\delta_n}^1 \int_0^{2\pi} \rho \ln(\rho)\ d\rho\ d\varphi = 2\pi \cdot \left[\frac{\rho^2}{2}\ln\rho - \frac{\rho^2}{4}\right]_{\delta_n}^1$$

$$\lim_{n\to\infty} I_n = 2\pi \cdot \left[-\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\lim_{\delta\to 0}\left\{\delta^2 \ln\delta\right\}\right] = -\frac{\pi}{2}$$