Analysis III
FSU Jena - WS 07/08
Serie 02 - Lösungen

Stilianos Louca

29. Oktober 2007

Aufgabe 01

Das Gebiet

$$M := \left\{ (x,y) : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4} \right\}$$

ist in Polarkoordinaten beschrieben durch

$$M = \left\{ \left(\frac{1}{2} + \rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi \right) : \varphi \in [0, 2\pi],\ \rho \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \right\}$$

Aufgabe 02

a) Der Schwerpunkt $\vec{r}_s$ eines Körpers K ist gegeben durch

$$\vec{r}_s = \frac{1}{m} \cdot \int_K \vec{r}\ dm$$

Das Trägheitsmoment J um eine beliebige Achse A ist gegeben durch

$$J_A = \int_K D(\vec{r}, A)^2\ dm$$

wobei $D(\vec{r}, A)$ der Abstand eines Ortspunktes zur Achse sei. Sei o.B.d.A A parallel zur z Achse die durch den Schwerpunkt verlaufen soll. A laufe außerdem durch die x Achse am Wert $x = A$. Dann gilt

$$J_A = \int_K D(\vec{r}, A)^2\ dm = \int_K \left((x-A)^2 + y^2)\right)\ dm = \int_K (x^2+y^2)\ dm + \int_K A^2\ dm - \int_K 2Ax\ dm$$

$$= \int_K D(\vec{r}, z)^2\ dm + A^2 m - \underbrace{2Amx_s}_{0} = J_z + A^2 m \quad \square$$

b) Unter der Verwendung von Kugelkoordinaten kann man für das Trägheitsmoment J_s bzgl. der Schwerpunktachse Z schreiben

$$J_s = \int_K D(\vec{r}, Z)^2\ dm = \frac{3m}{4\pi R^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{R} \left[\rho^2 \sin^2\vartheta \cdot \rho^2 \sin\vartheta\right]\ \cdot d\rho\ d\vartheta\ d\varphi$$

$$= \frac{3mR^2}{20\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin^3\vartheta\ d\vartheta\ d\varphi = \frac{2mR^2}{5}$$

Für die Tangentenachse (Abstand R vom Schwerpunkt) ergibt sich das Trägheitsmoment J_t entsprechend

$$J_t = J_s + mR^2 = \frac{7mR^2}{5}$$

Aufgabe 03

a)

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} a\rho \sin^\alpha \vartheta \cos^\beta \varphi \\ b\rho \sin^\alpha \vartheta \sin^\beta \varphi \\ c\rho \cos^\alpha \vartheta \end{pmatrix}$$

$$\det(\vec{r}\,') = \det \begin{pmatrix} a\sin^\alpha \vartheta \cos^\beta \varphi & a\rho\alpha \sin^{\alpha-1} \vartheta \cos\vartheta \cos^\beta \varphi & -a\beta\rho \sin^\alpha \vartheta \cos^{\beta-1} \varphi \sin\varphi \\ b\sin^\alpha \vartheta \sin^\beta \varphi & b\rho\alpha \sin^{\alpha-1} \vartheta \cos\vartheta \sin^\beta \varphi & b\rho\beta \sin^\alpha \vartheta \sin^{\beta-1} \varphi \cos\varphi \\ c\cos^\alpha \vartheta & -c\rho\alpha \cos^{\alpha-1} \vartheta \sin\vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

$$= abc\rho^2\alpha\beta \sin^{2\alpha-1} \vartheta \cos^{\alpha+1} \vartheta \cos^{\beta+1} \varphi \sin^{\beta-1} \varphi + abc\rho^2\alpha\beta \sin^{2\alpha+1} \vartheta \cos^{\alpha-1} \vartheta \cos^{\beta-1} \varphi \sin^{\beta+1} \varphi$$

$$+ abc\rho^2\alpha\beta \sin^{2\alpha-1} \vartheta \cos^{\alpha+1} \vartheta \sin^{\beta+1} \varphi \cos^{\beta-1} \varphi + abc\rho^2\alpha\beta \sin^{2\alpha+1} \vartheta \cos^{\alpha-1} \vartheta \sin^{\beta-1} \varphi \cos^{\beta+1} \varphi$$

$$= abc\rho^2\alpha\beta \cdot \sin^{2a-1} \vartheta \cos^{\alpha-1} \vartheta \sin^{\beta-1} \varphi \cos^{\beta-1} \varphi \left(\cos^2 \vartheta \cos^2 \varphi + \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi + \cos^2 \vartheta \sin^2 \varphi + \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi\right)$$

$$= abc\rho^2\alpha\beta \cdot \sin^{2a-1} \vartheta \cos^{\alpha-1} \vartheta \sin^{\beta-1} \varphi \cos^{\beta-1} \varphi$$

b)

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} a\rho \cos^\alpha \varphi \\ b\rho \sin^\alpha \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

$$\det(\vec{r}\,') = \det \begin{pmatrix} a\cos^\alpha \varphi & -a\rho\alpha \cos^{\alpha-1} \varphi \sin\varphi & 0 \\ b\sin^\alpha \varphi & b\rho\alpha \sin^{\alpha-1} \varphi \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= ab\rho\alpha \sin^{\alpha-1} \varphi \cos^{\alpha+1} \varphi + ab\rho\alpha \sin^{\alpha+1} \varphi \cos^{\alpha-1} \varphi = ab\rho\alpha \cos^{\alpha-1} \varphi \sin^{\alpha-1} \varphi$$

Aufgabe 04

Verwenden verallgemeinerte Polarkoordinaten (ρ, φ) mit

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} a\rho \cos^2 \varphi \\ b\rho \sin^2 \varphi \end{pmatrix} \rightarrow \det(\vec{r}\,') = 2ab\rho \cos\varphi \sin\varphi$$

und beschreiben die Kurve als

$$\left(\rho\cos^2 \varphi + \rho \sin^2 \varphi\right)^4 = \frac{\rho^2 \cos^4 \varphi}{a^2 h^2} + \frac{\rho^2 \sin^4 \varphi}{b^2 k^2} \rightarrow \frac{\cos^4 \varphi}{(ah\rho)^2} + \frac{\sin^4 \varphi}{(bk\rho)^2} = 1$$

Die entsprechende Fläche A ist gegeben durch

$$A = 2ab \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\overline{\rho}(\varphi)} \rho \cos\varphi \sin\varphi \; d\rho \; d\varphi, \;\; \overline{\rho}(\varphi) = \sqrt{\frac{a^2 \cos^4 \varphi}{h^2} + \frac{b^2 \sin^4 \varphi}{k^2}}$$

$$\rightarrow \;\; A = ab \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{a^2 \cos^5 \varphi}{h^2} \sin\varphi + \frac{b^2 \sin^5 \varphi}{k^2} \cos\varphi \right) \; d\varphi = \frac{ab}{6} \cdot \left[\frac{b^2}{k^2} + \frac{a^2}{h^2}\right]$$

Aufgabe 05

Sei V das Volumen des durch die Flächen

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= a^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= b^2 \\ x^2 + y^2 &= z^2 \end{aligned}$$

begrenzten Gebietes G. Wir verwenden Kugelkoordinaten $(\rho, \vartheta, \varphi)$ wobei die Koordinatentransformation gegeben ist durch

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \rho \sin\vartheta \cos\varphi \\ \rho \sin\vartheta \sin\varphi \\ \rho \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

und die Funktionaldeterminante $\rho^2 \sin\vartheta$ beträgt. Dann ergibt sich das Gebiet als

$$G = \left\{ \vec{r} : \rho \in [a, b],\ \vartheta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right],\ \varphi \in [0, 2\pi] \right\}$$

und das Volumen dementsprechend

$$V = \int_G dv = \int_0^{2\pi} \int_a^b \int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^2 \sin\vartheta \ d\vartheta \ d\rho \ d\varphi = \frac{\pi\sqrt{2}}{3} \cdot (\sqrt{2} - 1) \cdot \left(b^3 - a^3\right)$$

Aufgabe 06

Verwenden Zylinderkoordinaten

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \rho \cos\varphi \\ \rho \sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

Die entsprechende Funktionaldeterminante ist gegeben durch $\det(\vec{r}\,') = \rho$. Es ergibt sich ein Volumen

$$V = 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{R\cos\varphi} d\rho \ \sqrt{R^2 - \rho^2} = -\frac{4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \ \left[\left(R^2 - \rho^2\right)^{\frac{3}{2}} \right]_{\rho=0}^{R\cos\varphi}$$

$$= -\frac{4R^3}{3} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^3\varphi - 1\right) d\varphi = -\frac{4R^3}{3} \cdot \left[\frac{\cos^3\varphi}{3} - \cos\varphi - \varphi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{4R^3}{3}$$