Übungen zur Analysis III WS 06/07

13. Serie

1. Beweisen Sie

a) Für eine Folge von Elementen x_k aus einem vollständigen normierten Raum gilt $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} x_k$ konvergent.

b) Für eine (paarweise) orthogonale Folge von Elementen x_k aus einem Hilbert-Raum gilt $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2 < \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} x_k$ konvergent.

2.* Es sei x ein Element des Hilbert-Raumes H, und die Elemente $x_1, \cdots, x_n \in H$ seien orthonomal, d.h. $\|x_k\| = 1$ und $(x_i, x_k) = 0$ für $i \neq k$.

a) Bestätigen Sie für Zahlen c_i die Gleichung

$$\left\| x - \sum_1^n c_k x_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_1^n |(x, x_k)|^2 + \sum_1^n |c_k - (x, x_k)|^2 .$$

b) Bestimmen Sie die beste Approximation von x in der linearen Hülle von $x_1, \ldots, x_n$.

c) Bestätigen Sie die Besselsche Ungleichung $\sum_1^n |(x, x_k)|^2 \leq \|x\|^2$.

3.* Zu einer orthonormalen Folge $x_1, x_2, x_3, \ldots$ aus H heißt die Reihe $\sum_1^{\infty} (x, x_k) x_k$ Fourier-Reihe von x mit den Fourier-Koeffizienten (x, x_k). Die Konvergenz mit der Fourier-Reihe ist durch die Besselsche Ungleichung gesichert.
Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden vier Aussagen

(1) Die lineare Hülle der Folge (x_k) ist dicht in H.

(2) $x = \sum_1^{\infty} (x, x_k) x_k \quad \forall x \in H$

(3) $\sum_1^{\infty} |(x, x_k)|^2 = \|x\|^2 \quad \forall x \in H$ (Parseval-Gleichung)

(4) (Wenn $(x, x_k) = 0 \ \forall k$, dann $x = 0$) $\forall x \in H$