

Übungen zur Analysis III WS 06/07

12. Serie

1. Ein **Skalarprodukt** auf einem reellen linearen Raum H ordnet dem Paar von Elementen x und y die reelle Zahl (x, y) zu. Dabei soll gelten

$$\begin{aligned}(x, y) &= (y, x) \\ (\lambda x + \mu y, z) &= \lambda(x, z) + \mu(y, z) \quad \text{für Zahlen } \lambda, \mu \\ (x, x) &> 0 \quad \text{für } x \neq 0\end{aligned}$$

Ein **Prä-Hilbert-Raum** ist ein linearer Raum mit Skalarprodukt.

Zeigen Sie

a) $|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y)$ (Cauchy-Schwarz-Ungleichung)

b) $\sqrt{(x+y, x+y)} \leq \sqrt{(x, x)} + \sqrt{(y, y)}$

- 2.* Ein Prä-Hilbertraum ist normiert mit $\|x\| := \sqrt{(x, x)}$. Ein **Hilbert-Raum** ist ein vollständiger Prä-Hilbert-Raum. Bestätigen Sie für einen Hilbert-Raum die Parallelogrammgleichung

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

- 3.* Zeigen Sie, dass aus $x_n \rightarrow x$ und $y_n \rightarrow y$ folgt $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$.

- 4.* Zwei Elemente x und y eines Hilbert-Raumes sind zueinander **orthogonal**, wenn $(x, y) = 0$. Zeigen Sie für orthogonale x, y die Gleichung von Pythagoras $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

5. Es sei M ein abgeschlossener Unterraum von H und $x \in H \setminus M$.

Zeigen Sie, dass für $y_0 \in M$ die Aussagen

(1) $(x - y_0, y) = 0 \quad \forall y \in M$

(2) $\|x - y_0\| \leq \|x - y\| \quad \forall y \in M$

äquivalent sind. Wenn diese Eigenschaften erfüllt sind, heißt y_0 **beste Approximation** von x in M .

6. Zeigen Sie, dass jedes $x \in H \setminus M$ genau eine beste **Approximation** in M hat.

Hinweis: Verwenden Sie beim Existenzbeweis die Parallelogrammgleichung.

Zu den mit * gekennzeichneten Aufgaben sind schriftliche Lösungen anzufertigen und in der Woche vom **22. 1. - 26. 1.** in den Übungen abzugeben.