Übungen zur Analysis III WS 06/07

11. Serie

1.* Lösen Sie die Rand-Anfangswert-Aufgabe für die homogene Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad \text{für} \quad (x,y) \in (0,b) \times (0,c)$$

mit der homogenen Randbedingung

$u(x,y,t) = 0$ für $(x,y) \in \partial((0,b)\times(0,c))$ und den Anfangsbedingungen $u(x,y,0) = f(x,y)$ und $\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) = F(x,y)$ durch Separation.

2. Zu gegebener Funktion $\mathcal{F}$ auf $(0,b)\times(0,c)\times(0,\infty)$ sei die Schar von Funktionen $v_\tau (\tau > 0)$ auf $[0,b] \times [0,c] \times [\tau,\infty)$ definiert durch die Forderungen

$$\frac{\partial^2 v_\tau}{\partial t^2}(x,y,t) = a^2 \left(\frac{\partial^2 v_\tau}{\partial x^2}(x,y,t) + \frac{\partial^2 v_\tau}{\partial y^2}(x,y,t) \right),$$

$$v_\tau(x,y,t) = 0 \text{ für } (x,y) \in \partial((0,b) \times (0,c)) \text{ und } t \geq \tau\,,$$

$$v_\tau(x,y,\tau) = 0 \text{ und } \frac{\partial v_\tau}{\partial t}(x,y,\tau) = \mathcal{F}(x,y,\tau)\,.$$

Zeigen Sie, dass dann die Funktion

$$u(x,y,t) := \int_0^t v_\tau(x,y,t)d\tau$$

die Rand-Anfangswert-Aufgabe für die inhomogene Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,y,t) = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)(x,y,t) + \mathcal{F}(x,y,t)$$

mit der Randbedingung $u(x,y,t) = 0$ für $(x,y) \in \partial((0,b) \times (0,c))$ und der Anfangsbedingung $u(x,y,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) = 0$ erfüllt.

3. Formulieren Sie die Lösung der Rand-Anfangswert-Aufgabe für die inhomogene Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,y,t) = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)(x,y,t) + \mathcal{F}(x,y)$$

mit der Randbedingung $u(x,y,t) = 0$ für $(x,y) \in \partial((0,b) \times (0,c))$ und den Anfangsbedingungen $u(x,y,0) = f(x,y)$ und $\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) = F(x,y)$.

Zu den mit * gekennzeichneten Aufgaben sind schriftliche Lösungen anzufertigen und in der Woche vom **15. 1. - 19. 1.** in den Übungen abzugeben.