Übungen zur Analysis III   WS 06/07

10. Serie

1.* Zeigen Sie für $I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$

a) die Rekursionsformel

$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ (siehe 14. Serie Analysis I)

b) die explizite Formel

$$I_{2n+1} = \frac{2n(2n-2)(2n-4)\cdots 2}{(2n+1)(2n-1)(2n-3)\cdots 3}$$

2.* Die Legendre-Polynome

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \, \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

genügen der Differentialgleichung

$$(x^2-1)P_n''(x) + 2xP_n'(x) - n(n+1)P_n(x) = 0$$

(siehe 11. Serie Analysis I). Jede stetig differenzierbare Funktion f auf $[-1,1]$ lässt sich in der Form $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x)$ darstellen.

Berechnen Sie

a) $\int\limits_{-1}^{+1} (P_n(x))^2 dx$

b) $\int\limits_{-1}^{+1} P_m(x) P_n(x) dx$ für $m \neq n$

3. Zeigen Sie:
Das Dirichlet-Problem für die Kugel $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ mit der Randbedingung

$$u(R \sin\vartheta \cos\varphi, R \sin\vartheta \sin\varphi, R\cos\vartheta) = f(\vartheta)$$

hat die Lösung

$$u(r \sin\vartheta \cos\varphi, r \sin\vartheta \sin\varphi, r\cos\vartheta) = \sum_0^{\infty} c_n r^n P_n(\cos\vartheta)$$

mit $c_n = \frac{2n+1}{2R^n} \int\limits_0^{\pi} f(\vartheta) P_n(\cos\vartheta) \sin\vartheta \, d\vartheta$, wobei die Funktionen P_n die Legendre-Polynome sind.

Zu den mit * gekennzeichneten Aufgaben sind schriftliche Lösungen anzufertigen und in der Woche vom **08.01. - 12.01.** in den Übungen abzugeben.