

Übungen zur Analysis III WS 06/07

8. Serie

1. Es sei a eine reelle aber nicht ganze Zahl.

(a) Entwickeln Sie die Funktion f , auf $[-\pi, \pi]$ definiert durch $f(x) = \cos ax$ und 2π -periodisch auf \mathbb{R} fortgesetzt, in eine Fourier-Reihe.

(b) Zeigen Sie

$$\frac{\pi}{a} \cot \pi a = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2 - k^2}.$$

(c) Zeigen Sie

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) \quad (\text{Produktformel von Wallis}).$$

Hinweis: Zeigen Sie die Produktformel zunächst für $x \in (0, 1)$, indem Sie in b) die Zahl a als Variable auffassen und auf beiden Seiten das Riemann-Integral von 0 bis x bilden.

2.* Stellen Sie die Lösung des Dirichlet-Problems für die Kreisscheibe $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$ mit der Randbedingung

$$u(R \cos \varphi, R \sin \varphi) = f(\varphi)$$

durch einen Separationsansatz als unendliche Reihe dar.

Zu den mit * gekennzeichneten Aufgaben sind schriftliche Lösungen anzufertigen und in der Woche vom **11. 12.** - **15. 12.** in den Übungen abzugeben.