Übungen zur Analysis III WS 06/07

7. Serie

1. Es sei f eine stetig differenzierbare $2l$-periodische Funktion. Wie müssen die Koeffizienten a_n und b_n gewählt werden, so dass gilt

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right) \ ?$$

2. Es sei $f \in C^1[0, l]$ mit $f(0) = f(l) = 0$. Wie müssen die Koeffizienten gewählt werden, so dass gilt

   a)* $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x$? (Fourier-Sinus-Reihe)

   b) $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l} x$? (Fourier-Kosinus-Reihe)

3.* Es sei $f \in C^1([0, a] \times [0, b])$ mit $f(x, y) = 0$ für (x, y) aus dem Rand von $[0, a] \times [0, b]$. Bestimmen Sie die Koeffizienten a_{mn}, für die gilt

$$f(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \sin \left(\frac{n\pi}{b} y \right) \ .$$

4. Zeigen Sie für stetig differnzierbare komplexwertige 2π-periodische Funktionen f

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} dy \, e^{inx} \ .$$

5. Sei u harmonisch in der Kugel $K_R(0)$ in $\mathbb{R}^3$.
   Zeigen Sie, dass dann auch die Kelvin-Transformierte

$$v(x) := \frac{R}{\|x\|} u \left(\frac{R^2}{\|x\|^2} x \right)$$

   außerhalb der Kugel harmonisch ist.
   Wie lässt sich damit ein „äußeres Dirichlet-Problem“ für die Kugel bearbeiten?
   Hinweis: Verwenden Sie die Darstellung des Laplace-Operators in Kugelkoordinaten (siehe Serie 7 Analysis II).

Zu den mit * gekennzeichneten Aufgaben sind schriftliche Lösungen anzufertigen und in der Woche vom **04. 12. - 08. 12.** in den Übungen abzugeben.