Übungen zur Analysis III WS 06/07

4. Serie

1.* Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int\limits_{\mathcal{K}} \left(3x^2 + 2x \sin\frac{x}{y} + \frac{x^2}{y}\cos\frac{x}{y}\right) dx - \frac{x^3}{y^2}\cos\frac{x}{y}\, dy$$

($\mathcal{K}$ geradlinig von $(0,1)$ nach $(\pi, 2)$) mit Hilfe eines Potentials.

2. Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int\limits_{\mathcal{K}} (x+z)dx - (y+z)dy + (x-y)dz$ entlang der Schraubenlinie $x = 2\cos t\,, y = 2\sin t\,, z = t/\pi$ von $(2,0,0)$ nach $(-2,0,5)$ mit Hilfe eines Potentials.

3.* Berechnen Sie das Integral $\int \vec{F}\, d\vec{o}$ mit $\vec{F}(x,y,z) = (y-z, z-x, x-y)$ über den Kegel $x^2+y^2 = z^2\,, 0 \le z \le h\,$, nach außen orientiert.

4. Berechnen Sie das Integral $\int \vec{F} d\vec{o}$ mit $\vec{F}(x,y,z) = (yz, xz, xy)$ über die innere Seite der unteren Halbkugelfläche $x^2+y^2+z^2 = 1\,, z \le 0$

a) direkt

b) mit Hilfe des Integralsatzes von Gauß.

5. Berechnen Sie das Integral $\int \vec{F} d\vec{o}$ mit $\vec{F}(x,y,z) = (x, y, (x^2+y^2)z)$ über die Oberfläche des Zylinders $\{(x,y,z) : x^2+y^2 \le R^2 \wedge |z| \le 1\}$

a) direkt

b) mit Hilfe des Integralsatzes von Gauß.

6. Berechnen Sie das Integral $\int \vec{F} d\vec{o}$ mit $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,z)$ über die Oberfläche der Kugel $x^2+y^2+z^2 \le R^2$

a) mit Kugelkoordinaten

b) durch Projektion auf die $x-y$-Ebene

c) als Oberflächenintegral erster Art

d) mit dem Integralsatz von Gauß.

7.* Berechnen Sie das Integral $\int \vec{F} d\vec{o}$ mit $\vec{F}(x,y,z) = (x + x^2y\,z, y + xy^2\,z, z - 2xyz^2)$ über die nach oben orientierte obere Hälfte der Kugelfläche $x^2+y^2+z^2 = 4$ mit Hilfe des Integralsatzes von Gauß.

8. Bestätigen Sie den Greenschen Integralsatz $\int\limits_{\partial\Omega} f(x,y)dx + g(x,y)dy = \iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) d(x,y)$ in den Spezialfällen

a) $g = 0 \wedge \Omega = \{(x,y) : a \le x \le b \wedge h_1(x) \le y \le h_2(x)\}$

b) $f = 0 \wedge \Omega = \{(x,y) : c \le y \le d \wedge k_1(y) \le x \le k_2(y)\}$.

Wie läßt sich damit der Greensche Integralsatz im allgemeinen Fall begründen?

Zu den mit * gekennzeichneten Aufgaben sind schriftliche Lösungen anzufertigen und in der Woche vom **13. 11. - 17. 11.** in den Übungen abzugeben.