Formelsammlung der Vektoranalysis

Stilianos Louca

6. Juni 2009

Inhaltsverzeichnis

0.1 Definitionen

Seien $U, V, \varphi, \psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ \vec{F}, \vec{A}, \vec{B} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Seien außerdem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dabei sind alle betrachteten Funktionen stetig bzw. zweimal stetig differenzierbar.

0.2 Mehrfaches Ausführen des ∇-Operators

$$\begin{aligned}
&\operatorname{rot}\operatorname{grad} U = 0\\
&\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{A} = 0\\
&\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A} - \Delta\vec{A}\\
&\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A} = \Delta\vec{A} + \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A}\\
&\operatorname{div}\operatorname{grad} U = \Delta U\\
&\Delta\left\{\frac{-1}{4\pi}\cdot\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}_0\|_2}\right\} = \delta\left(\vec{r}-\vec{r}_0\right)
\end{aligned}$$

0.3 Differentialoperationen auf Kombinationen von Funktionen

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div}\left(\vec{A}\times\vec{B}\right) = \vec{B}\operatorname{rot}\vec{A} - \vec{A}\operatorname{rot}\vec{B}\\
&\operatorname{grad}(UV) = U\operatorname{grad} V + V\operatorname{grad} U\\
&\operatorname{rot}\left(U\vec{A}\right) = U\operatorname{rot}\vec{A} + (\operatorname{grad} U)\times\vec{A}\\
&\operatorname{div}\left(U\vec{A}\right) = U\operatorname{div}\vec{A} + \vec{A}\operatorname{grad} U\\
&\operatorname{rot}\left(\vec{A}\times\vec{B}\right) = \left(\vec{B}\operatorname{grad}\right)\vec{A} - \left(\vec{A}\operatorname{grad}\right)\vec{B} + \vec{A}\operatorname{div}\vec{B} - \vec{B}\operatorname{div}\vec{A}\\
&\operatorname{grad}\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right) = \left(\vec{B}\operatorname{grad}\right)\vec{A} + \left(\vec{A}\operatorname{grad}\right)\vec{B} + \vec{A}\times\operatorname{rot}\vec{B} + \vec{B}\times\operatorname{rot}\vec{A}
\end{aligned}$$

0.4 Integralsätze

Sei $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ eine durch $\vec{r}(u,v)$ parametrisierte offene Fläche. Ihr Rand $\partial\mathcal{O}$ sei parametrisiert durch $\vec{\gamma} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$. Sei ferner $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$ ein Gauss-Volumen.
Dabei seien

$$dV = d(x,y,z)$$

$$d\vec{A} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\ du\ dv,\ dA = \left\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right\|\ du\ dv,\ \vec{n} = \frac{d\vec{A}}{\|d\vec{A}\|}$$

$$d\vec{s} = \dot{\vec{\gamma}}\ dt,\ ds = \|\dot{\vec{\gamma}}\|\ dt,\ \vec{t} = \frac{\dot{\vec{\gamma}}}{\|\dot{\vec{\gamma}}\|}$$

0.4.1 Stokesschen Sätze

$$\int_{\partial\mathcal{O}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\mathcal{O}} \operatorname{rot}\vec{F}\cdot d\vec{A}$$

$$\int_{\partial\mathcal{O}} \varphi\ d\vec{s} = \int_{\mathcal{O}} d\vec{A}\times\operatorname{grad}\varphi$$

$$\int_{\partial\mathcal{O}} d\vec{s}\times\vec{F} = \int_{\mathcal{O}} \left(d\vec{A}\times\nabla\right)\times\vec{F}$$

0.4.2 Gaußschen Sätze

$$\int_{\partial\mathcal{V}} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{F} \; dV$$

$$\int_{\partial\mathcal{V}} \varphi \; d\vec{A} = \int_{\mathcal{V}} \operatorname{grad} \varphi \; dV$$

$$\int_{\partial\mathcal{V}} d\vec{A} \times \vec{F} = \int_{\mathcal{V}} \operatorname{rot} \vec{F} \; dV$$

0.4.3 Gaußscher Satz in der Ebene

Für die Fläche $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^2$ und Funktion $\vec{H} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gilt

$$\int_{\partial\mathcal{B}} \vec{H} \cdot \vec{n} \; ds = \int_{\mathcal{B}} \operatorname{div} \vec{H} \; dA$$

wobei $\vec{n}$ die äußere Normale von $\mathcal{B}$ ist:

$$\vec{n} \; ds = \begin{pmatrix} dy \\ -dx \end{pmatrix}$$

In Komponenten also:

$$\int_{\partial\mathcal{B}} (H^x dy - H^y dx) = \int_{\mathcal{B}} \left(\frac{\partial H^x}{\partial x} + \frac{\partial H^y}{\partial y} \right) \; dA$$

Speziell für $\vec{H} = \vec{r}$ ergibt sich

$$\operatorname{vol}_2(\mathcal{B}) = \frac{1}{2} \int_{\partial\mathcal{B}} (xdy - ydx)$$

0.4.4 Greenschen Formeln

Für Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{V} \subset G$ und $2\times$ stetig differenzierbare $\varphi, \psi : G \to \mathbb{R}$:

$$\int_{\partial\mathcal{V}} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \; dA = \int_{\partial\mathcal{V}} \varphi \operatorname{grad} \psi \cdot \; d\vec{A} = \int_{\mathcal{V}} (\varphi \Delta \psi + \operatorname{grad} \varphi \cdot \operatorname{grad} \psi) \; dV$$

$$\int_{\partial\mathcal{V}} \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) \; dA = \int_{\partial\mathcal{V}} (\varphi \operatorname{grad} \psi - \psi \operatorname{grad} \varphi) \; d\vec{A} = \int_{\mathcal{V}} (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) \; dV$$

mit dem äußeren Normaleneinheitsvektor n auf ∂V.

0.5 Mittelwertsatz über eine Kugeloberfläche

Ist $K(R) \subset \mathbb{R}^3$ eine Kugel mit dem Radius R und dem Mittelpunkt $\vec{r}_0$, und $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ harmonisch, also $\Delta u = 0$, so gilt

$$\frac{1}{4\pi R^2} \cdot \int\limits_{\partial K(R)} \varphi \; dA = \varphi\left(\vec{r}_0\right)$$

0.6 Erste Guldinsche Regel

Die Mantelfläche eines Drehkörpers ist das Produkt aus der Bogenlänge der erzeugenden Kurve und der Länge des Weges, den der Schwerpunkt dieser Kurve bei der Rotation zurücklegt.

0.7 Zweite Guldinsche Regel

Das Volumen eines Drehkörpers ist das Produkt aus der erzeugenden Fläche und der Länge des Weges, den der Flächenschwerpunkt dieser Fläche bei der Rotation zurücklegt.

0.8 Potentialfelder und Vektorpotentialfelder

0.8.1 Potentialfeld

Für ein Vektorfeld $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$ wenn es ein Skalarfeld $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gibt, so dass $\vec{F} = \operatorname{grad} U$. Das Feld U nennt sich Potentialfeld von $\vec{F}$.
Dabei gilt: Alle Potentialfelder eines Vektorfeldes $\vec{F}$ unterscheiden sich nur um eine Additive konstante.
Umgekehrt gilt: Ist U ein Potentialfeld von $\vec{F}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, so ist auch $U + \lambda$ ein Potentialfeld von $\vec{F}$.
Ansatz zur Berechnung von U:

$$U(x, y, z) = U(x_0, y_0, z_0) + \int_{x_0}^{x} F^x(\xi, y, z)\ d\xi + \int_{y_0}^{y} F^y(x, \xi, z)\ d\xi + \int_{z_0}^{z} F^z(x, y, \xi)\ d\xi$$

wobei $U(x_0, y_0, z_0)$ beliebig wählbar ist.

Spezialfall radialsymmetrische Felder: Für

$$\vec{F} = f(r) \cdot \vec{e}_\rho$$

ergibt sich sofort

$$U = U(r) = \int f(r)\ dr$$

Jedes radialsymmetrische Vektorfeld $\vec{F} = f(r) \cdot \vec{e}_\rho$ ist demnach Wirbelfrei und somit ein Gradientenfeld.

0.8.2 Vektorpotential

Für ein Vektorfeld $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ genau dann wenn es ein Vektorfeld $\vec{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gibt mit $\vec{F} = \operatorname{rot} \vec{A}$. Das Feld $\vec{A}$ nennt sich Vektorpotential des Feldes $\vec{F}$.
Dabei gilt: Sind $\vec{A}_1$ und $\vec{A}_2$ Vektorpotentiale von $\vec{F}$, so ist $\vec{A}_2 - \vec{A}_1$ ein Gradientenfeld.
Umgekehrt gilt: Ist $\vec{A}$ ein Vektorpotential von $\vec{F}$ und $\vec{B}$ ein Gradientenfeld, so ist auch $\vec{A} + \vec{B}$ ein Vektorpotential von $\vec{F}$.
Ansätze zur Berechnung von $\vec{A}$:

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} \int_0^z F^y(x, y, t)\ dt \\ -\int_0^z F^x(x, y, t)\ dt + \int_0^x F^z(t, y, 0)\ dt \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{A} = \int_0^1 t \left(\vec{F}(t\vec{r}) \times \vec{r} \right)\ dt$$

0.9 Zerlegung von Vektorfeldern

Jedes stetig differenzierbare Vektorfeld $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ kann als Summe eines Gradientenfeldes $\vec{G} = \operatorname{grad} \varphi$ und eines Wirbelfeldes $\vec{W} = \operatorname{rot} \vec{A}$ dargestellt werden:

$$\vec{F} = \vec{G} + \vec{W} = \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{rot} \vec{A}$$

Ansatz zur Bestimmung der Summanden:

- Durch lösen der DGL $\Delta\varphi = \operatorname{div} \vec{F}$ bekommt man φ bzw. $\vec{G} = \operatorname{grad} \varphi$.
- Dann setzten $\vec{W} := \vec{F} - \vec{G}$.
- Somit ist $\operatorname{div} \vec{W} = 0$ und $\vec{W}$ ist somit ein Wirbelfeld.

0.10 Konstruktion eines Feldes aus Wirbelfeld und Quellenfeld

Für gegebenes Skalarfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und Vektorfeld $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lässt sich ein Vektorfeld $\vec{A}$ konstruieren mit

$$\operatorname{div} \vec{A} = f \ \wedge \ \operatorname{rot} \vec{A} = \vec{F}$$

Ansatz:

- Lösen die DGL $\operatorname{rot} \vec{C} = \vec{F}$ und finden so ein $\vec{C}$.
- Lösen die DGL $\Delta\varphi = f - \operatorname{div} \vec{C}$ und finden so ein φ.
- Nennen $\vec{A} := \operatorname{grad} \varphi + \vec{C}$.