

Analysis III - Vorlesungsscript

FSU Jena - WS 2007/2008

Stilianos Louca

2. Oktober 2011

Inhaltsverzeichnis

1	Vorwort	4
1.1	Was dies ist	4
1.2	Verbesserungen	4
2	Vektoranalysis	5
2.1	Inhalt von m -dimensionalen Flächen im \mathbb{R}^n	5
2.1.1	Definition: Parallelepiped (Parallelotop)	5
2.1.2	Definition: m -dimensionaler Inhalt (Volumen) eines Parallelepipeds	5
2.1.3	Motivation von $\mu_m(P) = \text{vol}_m(P)$ und Eigenschaften von $\text{gr}(T)$	5
2.1.4	Definition: Parametrisierung einer Fläche	6
2.1.5	Definition: Tangentialraum	6
2.1.6	Lemma	6
2.1.7	Definition: m -dimensionaler Inhalt einer Fläche	6
2.1.8	Definition: m -dimensionales Integral über eine m -dimensionale Fläche	6
2.1.9	Spezialfälle und geometrische Motivation	7
2.1.10	Eine Beschreibung der Oberfläche $F \subset \mathbb{R}^n$	8
2.2	Die klassischen Integralsätze: Gauß, Stokes, Green	8
2.2.1	Definition: Tangentialvektor	8
2.2.2	Definition: Normalenvektor	9
2.2.3	Definition: Positiv orientiertes und orthogonales Dreibein	9
2.2.4	Definition: Bogenelement (Linielement)	10
2.2.5	Definition: Flächenelement	10
2.2.6	Definition: Kurvenintegral 1. Art	10
2.2.7	Definition: Oberflächenintegral 1. Art	10
2.2.8	Definition: Kurvenintegral 2. Art	10
2.2.9	Definition: Oberflächenintegral 2. Art	11
2.2.10	Geometrische bzw. physikalische Interpretation	11
2.2.11	Der Stokessche Integralsatz	11
2.2.12	Der Gaußsche Integralsatz	12
2.2.13	Greenscher Satz oder Gaußscher Satz in der Ebene	13
2.3	Weitere Differential- und Integralformen	14
2.3.1	Nabla-Kalkül	14
2.3.2	Definition: Laplace Operator	14
2.3.3	Integralformen im \mathbb{R}^3	15
2.3.4	Satz: Gaußscher Satz in div-, grad- und rot- Form	15
2.3.5	Satz: Stokesscher Satz in rot-, grad- und ∇ -Form	15
2.3.6	Greensche Formeln	16
2.4	Wirbel- und Quellenfreie Vektorfelder	16
2.4.1	Definition: Gradientenfeld (Potentialfeld)	16
2.4.2	Definition: Wegunabhängigkeit	16
2.4.3	Satz:	17

2.4.4	Ein praktisches Kriterium für Gradientenfelder	17
2.4.5	Praktische Bestimmung vom Potential φ	17
2.4.6	Definition: Zusammenziehbare Kurve	18
2.4.7	Definition: Einfach zusammenhängendes Gebiet	18
2.4.8	Satz: Potentialkriterium	19
2.4.9	Satz über Wirbelfreie Felder	20
2.4.10	Definition: Quellenfreiheit und Vektorpotential	20
2.4.11	Satz: Existenzsatz zu Vektorpotentialen	20
2.4.12	Satz über quellenfreie Felder:	20
2.4.13	Abschließende Bemerkungen	21
3	Partielle Differentialgleichungen	22
3.1	Einführung	22
3.1.1	Definition: Klassifizierung von linearen PDG 2. Ordnung	23
3.1.2	Definition: Allgemeine Lösung einer Partiellen Differentialgleichung	24
3.1.3	Interpretation von PDG, AB und RB	24
3.2	Lineare partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung	25
3.2.1	Vorgehensweise	25
3.2.2	Methode der Koordinatentransformation	26
3.3	Lineare partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung	26
3.3.1	Die Laplace-Poisson Gleichung (Potentialgleichung)	27
3.3.2	Lemma über parameterabhängige Integrale	27
3.3.3	Grundlösungen und Darstellungsformen	28
3.3.4	Lemma B: Lemma über das Newton-Potential	28
3.3.5	Satz: Darstellungsformel	28
3.3.6	Definition: Grundlösung	29
3.3.7	Satz über die Grundlösung	29
3.3.8	Definition: Harmonische Funktion	29
3.3.9	Definition: Greensche Funktion	29
3.3.10	Satz über die Symmetrie der Greenschen Funktion	29
3.3.11	Satz über die Lösung der Poissongleichung	29
3.3.12	Greensche Funktion für die Kugel	30
3.3.13	Greensche Funktion für den Halbraum	31
3.4	Eigenschaften harmonischer Funktionen	32
3.4.1	Definition: Mittelwerteigenschaft	32
3.4.2	Satz über harmonische Funktionen	32
3.4.3	Eindeutigkeitssatz	32
3.4.4	Existenz- & Eindeutigkeit beim Dirichlet RWP	33
3.4.5	Lemma C	33
3.4.6	Satz über das DRP für die Laplace Gleichung	33
3.4.7	Satz zur Poissongleichung	35
3.4.8	Satz über die Eindeutigkeit der Poissongleichung	35
3.5	Die Wellengleichung	35
3.5.1	Satz über die Eindeutigkeit der Lösung des Cauchyproblems	36
3.5.2	Konstruktion von Lösungen des Cauchyproblems für die WG	36
3.5.3	Satz über die Lösung des 1-dimensionalen Cauchyproblems	38
3.5.4	Die 2 und 3-dimensionale Wellengleichung	38
3.5.5	Satz über das retardierte Potential in der Wellengleichung	39
3.5.6	Lemma über das retardierte Potential	39
3.5.7	Satz über die 2-dimensionale Wellengleichung	39
3.6	Cauchyproblem der Wärmeleitungsgleichung	40
3.6.1	Satz über die Fundamentallösung der WL	40

4	Fouriermethode zur Lösung von partiellen Differentialgleichungen	41
4.1	Einführung	41
4.1.1	Beispiel: Wärmeleitung in einem Kreiszyylinder	41
4.2	Elemente der Hilbertraumtheorie	44
4.2.1	Definition: Prähilbertraum	44
4.2.2	Definition: Orthogonalität	45
4.2.3	Satz des Pythagoras	45
4.2.4	Definition: Hilbertraum	45
4.2.5	Definition: Separabler Hilbertraum	46
4.2.6	Definition: Orthogonalsystem	46
4.2.7	Definition: Orthonormalsystem	47
4.2.8	Satz über Orthogonalsysteme	47
4.2.9	Definition: Reihe	47
4.2.10	Definition: Orthogonalreihe	47
4.2.11	Satz über Orthogonalreihen	47
4.2.12	Lemma	48
4.2.13	Besselsche Ungleichung & beste Approximation	48
4.2.14	Definition: Fourierreihe	48
4.2.15	Definition: Vollständiges Orthonormalsystem	49
4.2.16	Satz über vollständige Orthonormalsysteme	49
4.3	Trigonometrische Fourierreihen (klassisch)	49
4.3.1	Einführung	49
4.3.2	Trigonometrische Orthonormalsysteme	50
4.3.3	Fourierreihe im reellen Orthonormalsystem	50
4.3.4	Fourierreihe im komplexen Orthonormalsystem	51
4.3.5	Rechenregeln	52
4.3.6	Trigonometrischen Polynome	52
4.3.7	Besselsche Ungleichung & beste Approximation	53
4.3.8	Lemma von Riemann-Lebesgue	53
4.3.9	Integraldarstellung von Teilsummen	53
4.3.10	Riemannscher Lokalisationssatz	54
4.3.11	Punktweise & Gleichmäßige Konvergenz von Fourierreihen	54
4.3.12	Gliedweise Differentiation & Integration von Fourierreihen	55

1 Vorwort

1.1 Was dies ist

Hierbei handelt es sich um grobe Aufzeichnungen des Stoffes der im WS 2007/2008 an der FSU Jena von Prof. Bernd Carl im Fach Analysis III gelehrt wurde. Dabei sind Beispiele und Beweise im allgemeinen nicht vorhanden da ich selber nur endlich viel Zeit habe. Wo möglich, versuchte ich eigene hilfreiche Kommentare hinzuzufügen!

1.2 Verbesserungen

Ich werde immer mal dieses Skript verbessern bzw. erweitern. Im Falle von Fehlern, ist mir Bescheid zu sagen das beste was du machen kannst da so alle davon profitieren können. Wissen ist das einzige auf dieser Welt das vom Teilen mehr wird!

Ich bin zu erreichen unter *stilianos.louca@apfel.uni-jena.de*, ohne das *Obst*.

2 Vektoranalysis

2.1 Inhalt von m -dimensionalen Flächen im \mathbb{R}^n

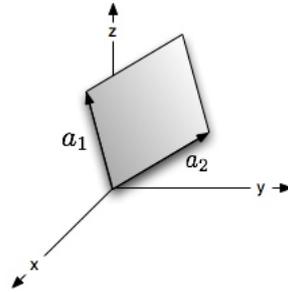
2.1.1 Definition: Parallelepiped (Parallelotop)

Seien $1 \leq m \leq n$ und $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$. Dann heißt

$$P := \{\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m : 0 \leq \lambda_1, \dots, \lambda_m \leq 1\}$$

m -dimensionales Parallelepiped.

Beispiel: $m = 2, n = 3$



2.1.2 Definition: m -dimensionaler Inhalt (Volumen) eines Parallelepipedes

Sei P ein m -dimensionales Parallelepiped. Dann nennt man

$$\mu_m(P) := \text{vol}_m(P) := \sqrt{\det(\langle a_i, a_j \rangle)_{i,j=1}^m}$$

den m -dimensionalen Inhalt von P . Dabei ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt auf \mathbb{R}^n .

Definieren einen linearen Operator $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch den Ansatz $T\vec{e}_i := a_i, i = 1, \dots, m$ wobei $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^m$ die kanonische Basis im \mathbb{R}^m ist. Dann gilt:

$$\det(\langle a_i, a_j \rangle) = \det(\langle T\vec{e}_i, T\vec{e}_j \rangle) = \det(\langle T^T T \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle) = \det(T^T T) \geq 0$$

Die Größe

$$\text{gr } T := \det(T^T T), T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, 1 \leq m \leq n$$

heißt *Gramsche Determinante* und $T^T T$ *Gramsche Matrix*.

2.1.3 Motivation von $\mu_m(P) = \text{vol}_m(P)$ und Eigenschaften von $\text{gr}(T)$

Sei $W = [0, 1]^m, T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, P = T(W)$. Betrachten folgende Spezialfälle:

- Für $m = 1$ ergibt sich durch

$$\text{vol}_1(P) = \sqrt{\det(\langle a_1, a_1 \rangle)} = \sqrt{\langle a_1, a_1 \rangle} = \sqrt{\|a_1\|_2^2} = \|a_1\|$$

die Länge des Vektors \vec{a}_1 .

- Für $m = n$ ergibt sich durch

$$\text{vol}_n(P) = \sqrt{\text{gr}(T)} = \sqrt{\det(T^T T)} = \sqrt{\det(T^T) \det(T)} = |\det(T)| = \mu_n(T(W)) \text{ da } \mu_n(T(A)) = |\det(T)| \mu_n(A)$$

der n -dimensionale Inhalt von $P = T(W)$.

- Sei $m = 2, n = 3$. Dann gilt

$$\det(\langle a_i, a_j \rangle)_{i,j=1}^2 = \langle a_1, a_1 \rangle \langle a_2, a_2 \rangle - \langle a_1, a_2 \rangle^2 = \|a_1\|_2^2 \|a_2\|_2^2 - \langle a_1, a_2 \rangle^2 = \|a_1 \times a_2\|_2^2$$

Somit ist $\text{vol}_2(P) = \|a_1 \times a_2\|$ der Flächeninhalt des Parallelogramms, das von \vec{a}_1 und \vec{a}_2 erzeugt ist.

- Für $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $U : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ gilt

$$\text{gr}(TU) = \text{gr} T \cdot |\det(U)|^2$$

Insbesondere gilt für orthogonale Transformationen $U : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ d.h

$$U^T U = U U^T = I_m, \quad V^T V = V V^T = I_n$$

die Volumenerhaltung:

$$\text{gr}(VTU) = \text{gr}(T)$$

Das Volumen bleibt bei Drehungen erhalten!

2.1.4 Definition: Parametrisierung einer Fläche

Sei $G \subset \mathbb{R}^m$ eine Jordan-messbare Menge und $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^n$, ($1 \leq m \leq n$) eine injektive, stetig differenzierbare und Lipschitz-stetige Funktion, mit $\text{Rang } \varphi'(u) = m$ für $u = (u_1, \dots, u_m) \in G$. dann heißt die Menge $F := \varphi(G)$ eine (m -dimensionale) *offene Fläche* und φ eine Parametrisierung von F .

2.1.5 Definition: Tangentialraum

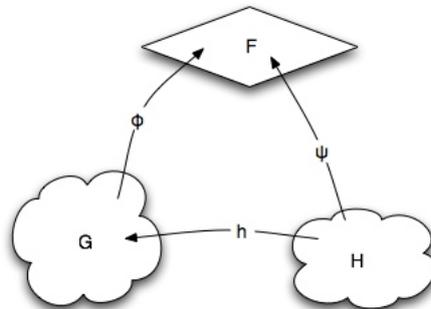
Die Menge

$$T_u F := \text{span} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial u_m}(u) \right\}$$

heißt *Tangentialraum* an F im Punkt $\varphi(u)$.

2.1.6 Lemma

Sind $\varphi : G \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\psi : H \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ zwei Parameterdarstellungen der Fläche $F \subset \mathbb{R}^n$ so gibt es einen Diffeomorphismus $h : H \rightarrow G = h(H)$ mit $\psi = \varphi \circ h$.



2.1.7 Definition: m -dimensionaler Inhalt einer Fläche

Unter dem *m -dimensionalen Inhalt (Volumen)* der Fläche $F \subset \mathbb{R}^n$ verstehen wir die Größe

$$\mu_m(F) := \text{vol}_m(F) := \int_F dS(x) := \int_G \sqrt{\text{gr}(\varphi'(u))} du$$

Ist φ sogar auf $cl(G)$ definiert und Lipschitz-stetig, so heißt $F := \varphi(cl(G))$ (*abgeschlossene Fläche*), wenn $\varphi(G)$ und $\varphi(\partial G)$ disjunkt sind und φ im obigen Sinne definiert ist.

2.1.8 Definition: m -dimensionales Integral über eine m -dimensionale Fläche

Wir verallgemeinern den vorigen Begriff und definieren für eine stetige Funktion $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ das *m -dimensionale Integral* von f über die Fläche F als

$$\int_F f dS(x) := \int_G f(\varphi(u)) \sqrt{\text{gr}(\varphi'(u))} du$$

Bemerkungen:

- Die Größe

$$dS(x) := \sqrt{\text{gr}(\varphi'(u))} du = \sqrt{\det \left(\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u^i}, \frac{\partial \varphi}{\partial u^j} \right\rangle \right)} du, \quad x = \varphi(u)$$

heißt *m-dimensionales Flächenelement* von F . Für $m = n - 1$ sagt man auch *Oberflächenelement*. Ist ferner $n = 3$ dann ergibt sich

$$dS(x) = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \times \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \right\|_2 du_1 du_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \right)^2 \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \right)^2 - \left[\frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \right]^2} du_1 du_2$$

Für eine Kugel beschrieben in Kugelkoordinaten (R, ϑ, φ) , $R : \text{const}$ speziell:

$$dS(x) = R^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$

- Das Integral ist unabhängig von der Parameterdarstellung φ von F , und damit sinnvoll definiert.
- Sei $F \subset \mathbb{R}^n$ eine m -dimensionale Fläche. Ist die charakteristische Funktion \mathcal{X}_A einer Teilmenge $A \subset F$ integrierbar auf F , so ist der m -dimensionale Inhalt (m -dimensionales Volumen) von A definiert durch

$$\mu_m(A) := \text{vol}_m(A) := \int_F \mathcal{X}_A \, dS$$

- Sei $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine zentrale Streckung

$$Tx = rx, \quad r > 0, \quad T = rI$$

so geht die Fläche F in die Fläche

$$T(F) = rF := \{rx \mid x \in F\}$$

über. Ist $f : rF \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, dann gilt für das Integral über die m -dimensionale Fläche F bzw. rF :

$$\int_{rF} f(x) \, dS(x) = r^m \cdot \int_F f(ry) \, dS(y)$$

Speziell gilt für den m -dimensionalen Inhalt

$$\mu_m(rA) = r^m \cdot \mu_m(A)$$

2.1.9 Spezialfälle und geometrische Motivation

Sei $\varphi : G \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $1 \leq m \leq n$ eine Parametrisierung von F . Untersuchen folgende Spezialfälle:

- $m = n$: Das m -dimensionale Flächenintegral geht in das bekannte Volumenintegral über:

$$\begin{aligned} \int_F f(x) \, dS(x) &= \int_G f(\varphi(u)) \sqrt{\text{gr}(\varphi'(u))} \, du = \int_G f(\varphi(u)) \sqrt{\det(\varphi'^T(u)\varphi'(u))} \, du \\ &= \int_G f(\varphi(u)) \sqrt{\det(\varphi'^T(u)) \det(\varphi'(u))} \, du = \int_G f(\varphi(u)) |\det(\varphi'(u))| \, du = \int_F f(x) \, dx \end{aligned}$$

- $m = 1$, $n > 1$: Es ergibt sich das bekannte Kurvenintegral:

$$\begin{aligned} \int_F f(x) \, dS(x) &= \int_G f(\varphi(u)) \sqrt{\text{gr}(\varphi'(u))} \, du = \int_G f(\varphi(u)) \sqrt{\det(\varphi'^T(u)\varphi'(u))} \, du \\ &= \int_G f(\varphi(u)) \|\varphi'(u)\|_2 \, du = \int_F f(x) \, ds \end{aligned}$$

- $m = n - 1$: Oberflächenintegral. Spezialfall: $n = 3$, $m = 2$:

$$\int_F f(x) dS(x) = \int_G f(\varphi(u)) \sqrt{\text{gr}(\varphi'(u))} du = \int_G f(\varphi(u)) \sqrt{\det \left(\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \end{pmatrix} \right)} du_1 du_2$$

$$= \int_G f(\varphi(u)) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \times \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \right\| du_1 du_2$$

- m -dimensionales Parallelogramm: Definiert man die lineare Abbildung

$$\varphi(\vec{e}_i) = \vec{a}_i, \quad i = 1, \dots, m$$

die die Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m$ auf die Parallelogrammvektoren a_1, \dots, a_m eins zu eins abbildet, d.h

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi(x^i \vec{e}_i) = x^i \varphi(\vec{e}_i) = x^i \vec{a}_i$$

so ist

$$\text{gr}(\varphi') = \det \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) = \det(\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j)$$

und somit der Flächeninhalt des Parallelogramms

$$A = \int_{[0,1]^m} \sqrt{\text{gr}(\varphi')} dx = \det(\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j) \cdot \underbrace{\int_{[0,1]^m} dx}_1 = \det(\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j)$$

was genau dem anfangs eingeführten Parallelogram-Flächeninhalt entspricht.

2.1.10 Eine Beschreibung der Oberfläche $F \subset \mathbb{R}^n$

Sei $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$, $g : G \rightarrow \mathbb{R}$. Betrachten die Fläche

$$F := \{(x_1, \dots, x_n) \in G \times \mathbb{R} \mid x_n = g(x_1, \dots, x_{n-1})\}$$

Für den Inhalt der Fläche F gilt

$$\text{vol}_{n-1}(F) = \int_G \sqrt{1 + \|\text{grad } g(u)\|_2^2} du = \int_G \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial g}{\partial u_i} \right)^2} d(u_1, \dots, u_{n-1})$$

Für das Oberflächenintegral ferner:

$$\int_F f(x) dS(x) = \int_G f(u, g(u)) \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial g}{\partial u_i} \right)^2} du$$

2.2 Die klassischen Integralsätze: Gauß, Stokes, Green

2.2.1 Definition: Tangentialvektor

Sei $K \subset \mathbb{R}^3$ eine Kurve und

$$\vec{r} : [a, b] \rightarrow K, \quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

eine Parametrisierung von K . Dann heißt $\dot{\vec{r}}(t) = \vec{r}'(t)$ *Tangentenvektor* an die Kurve im Punkt $\vec{r}(t)$ und

$$\vec{t} := \frac{\dot{\vec{r}}(t)}{\|\dot{\vec{r}}\|_2}$$

Tangentialeinheitsvektor. Es gilt $\|\vec{t}\|_2 = 1$.

2.2.2 Definition: Normalenvektor

Sei $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ eine offene bzw. abgeschlossene Fläche und

$$\vec{r} : G \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{O}, \quad \vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$$

eine Parametrisierung von \mathcal{O} . Dann sind die Vektoren

$$\vec{r}_u(p) := \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(p), \quad \vec{r}_v(p) := \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(p) \in T_p \mathcal{O}$$

Tangentenvektoren im Tangentialraum (Tangentenvektorraum) an \mathcal{O} im Punkt $\vec{r}(p)$. Ein Vektor $\vec{N} \in \mathbb{R}^3$ heißt *Normalenvektor* von \mathcal{O} im Punkt $\vec{r}(p) : \Leftrightarrow$

$$\forall \vec{h} \in T_p \mathcal{O} : \vec{N} \cdot \vec{h} = \langle \vec{N}, \vec{h} \rangle = 0$$

Schreibweise: $\vec{N} \perp \vec{h}$.

Erzeugen von Normalenvektor: Der Vektor

$$\vec{N} = \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u}(p) \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v}(p)$$

ist Normalenvektor von \mathcal{O} im Punkt $p = (u, v)$. Die Größe

$$\vec{n} := \frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|_2}$$

heißt *Normaleneinheitsvektor* an \mathcal{O} . Es gilt:

$$\left\| \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v} \right\|_2 = \sqrt{\text{gr}(\vec{r}'(u, v))} = \sqrt{E \cdot G - F^2}$$

Dabei sind

$$E := \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right)^2, \quad G := \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right)^2, \quad F := \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$$

die so genannten *Gaußschen Fundamentalgrößen*.

2.2.3 Definition: Positiv orientiertes und orthogonales Dreibein

Eine Vektorbasis $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ heißt in dieser Reihenfolge *positiv orientiert* : \Leftrightarrow

$$\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) > 0$$

Die Vektorbasis (Dreibein)

$$\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right)$$

ist positiv orientiert. Ist $F = 0 \forall (u, v) \in G$ so heißt

$$(\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{r}_u \times \vec{r}_v)$$

ein *orthogonales Dreibein*

2.2.4 Definition: Bogenelement (Linielement)

Sei $K \subset \mathbb{R}^3$ eine Kurve und $\vec{r}: T \subset \mathbb{R} \rightarrow K$ eine Parametrisierung. Dann heißt

$$d\vec{s} = d\vec{r} = d\vec{r}(t) := \dot{\vec{r}}(t) dt$$

das *vektorielle Bogenelement* oder *Linielement* von der Kurve K . Dabei ist

$$ds := \left\| \dot{\vec{r}} \right\|_2 dt$$

das (skalare) Bogenelement (vgl. Analysis II)

2.2.5 Definition: Flächenelement

Sei $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ eine 2-Dimensionale Fläche und $\vec{r}: G \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{O}$ eine Parametrisierung. Dann heißt

$$d\vec{S} := d\vec{\sigma} \equiv d\vec{A} := (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) d(u, v) = \vec{n} dA$$

das *vektorielle Oberflächenelement* von \mathcal{O} , wobei

$$dA = dS(x) = \sqrt{\text{gr}(\vec{r}(u, v))} du dv = \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|_2 du dv$$

das 2-Dimensionale Flächenelement ist.

2.2.6 Definition: Kurvenintegral 1. Art

Sei $K \subset \mathbb{R}^3$ eine Kurve und $\vec{r}: [a, b] \rightarrow K$ eine Parametrisierung. Sei $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann heißt

$$\int_K f ds := \int_a^b f(\vec{r}(t)) \left\| \dot{\vec{r}} \right\| dt = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} dt$$

Kurvenintegral 1. Art. (vgl. Analysis II)

2.2.7 Definition: Oberflächenintegral 1. Art

Sei $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche und $\vec{r}: G \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{O}$ eine Parametrisierung. Sei außerdem $f: \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann heißt

$$\int_{\mathcal{O}} f dA = \int_{\mathcal{O}} f do := \int_G f(\vec{r}(u, v)) \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|_2 d(u, v) = \int_G f(\vec{r}(u, v)) \sqrt{E \cdot G - F^2} d(u, v)$$

Oberflächenintegral 1. Art.

2.2.8 Definition: Kurvenintegral 2. Art

Sei $K \subset \mathbb{R}^3$ eine Kurve und $\vec{r}: [a, b] \rightarrow K$ eine Parametrisierung. Sei $F: K \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F = (P, Q, R)$ ein stetiges Vektorfeld. Dann heißt

$$\int_K \vec{F} d\vec{s} := \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \dot{\vec{r}} dt = \int_a^b (\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}) \left\| \dot{\vec{r}} \right\|_2 dt = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \vec{t}(t) ds$$

Kurvenintegral 2. Art. (vgl. Analysis II)

Bemerkung: Ein Kurvenintegral 2. Art kann als Kurvenintegral 1. Art geschrieben werden, indem man die skalare Funktion $\vec{F} \cdot \vec{t}$ integriert.

2.2.9 Definition: Oberflächenintegral 2. Art

Sei $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche und $\vec{r}: G \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{O}$ eine Parametrisierung. Sei außerdem $\vec{F}: \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F = (P, Q, R)$ ein stetiges Vektorfeld. Dann heißt

$$\int_{\mathcal{O}} \vec{F} d\vec{A} = \int_{\mathcal{O}} \vec{F} d\vec{o} := \int_G \vec{F}(\vec{r}(u, v)) \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) d(u, v) = \int_G \left(\vec{F}(\vec{r}(u, v)) \cdot \vec{n} \right) do$$

Oberflächenintegral 2. Art.

Bemerkung: Oberflächenintegrale 2. Art lassen sich auf Oberflächenintegrale 1. Art zurückführen, indem man die skalare Funktion $\vec{F} \cdot \vec{n}$ integriert.

2.2.10 Geometrische bzw. physikalische Interpretation

a) Ist $K \subset \mathbb{R}^3$ eine Kurve und $\vec{F}: K \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Kraft, dann ist

$$\int_K \vec{F} d\vec{s}$$

die Arbeit die vom Kraftfeld entlang der Kurve K geleistet wird.

b) Ist $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ eine 2-dimensionale Fläche und $\vec{j}: \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^3$ die Stromdichte einer Flüssigkeit, so ist

$$\int_{\mathcal{O}} \vec{j}(\vec{r}) d\vec{A}$$

die Flüssigkeitsmasse die pro Zeiteinheit durch das Oberflächenelement $d\vec{A}$ durchfließt. Ferner ist

$$\int_{\mathcal{O}} \vec{j}(\vec{r}) d\vec{A}$$

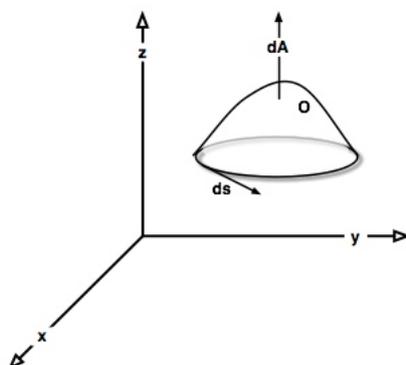
der *Vektorfluss* durch \mathcal{O} , also die Flüssigkeitsmasse, die pro Zeiteinheit durch die Fläche \mathcal{O} hindurchfließt.

2.2.11 Der Stokessche Integralsatz

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet, d.h. eine offene, zusammenhängende Menge, und $\mathcal{O} \subset \Omega$ eine kompakte Fläche, so dass $\partial\mathcal{O}$ (Rand von \mathcal{O}) eine glatte Kurve ist, d.h. die Kurve besitzt eine stetig differenzierbare Parametrisierung. Sei $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F = (P, Q, R)$ eine stetig differenzierbare Vektorfunktion. Dann gilt:

$$\int_{\partial\mathcal{O}} \vec{F} d\vec{s} = \int_{\mathcal{O}} \text{rot } \vec{F} d\vec{A}$$

wobei $\partial\mathcal{O}$ bzw. $d\vec{s}$ nach der *Rechtsschraubenregel* orientiert bzw. verknüpft sind. Das heißt: die Drehrichtung von $d\vec{s}$ muss so sein dass sich eine so drehende Rechtsschraube in Richtung $d\vec{A}$ bewegen würde.



Dabei ist

$$\operatorname{rot} \vec{F} := \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

die so genannte *Rotation* des Vektorfeldes \vec{F} . Dabei gilt folgende formale *Merkregel*:

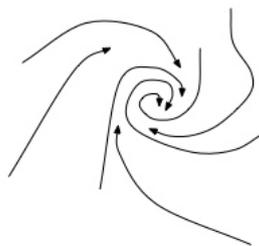
$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

wobei nach der 1. Zeile entwickelt wird.

Bemerkung: Der Satz von Stokes stellt eine Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Integralrechnung (vgl. Analysis I) im eindimensionalen Fall dar:

$$\int_a^b f' dx = f(b) - f(a)$$

Geometrische Interpretation: Der Vektorfluß der Rotation $\operatorname{rot} \vec{F}$ eines Vektorfeldes \vec{F} durch eine Fläche \mathcal{O} ist gleich der Zirkulation des Feldes längst der Randkurve $\partial\mathcal{O}$ von \mathcal{O} . Anders: Die Rotation eines Feldes an einem Punkt $P \in \mathbb{R}^3$ drückt die Richtung aus in der man eine *Drehschaufel* richten muss damit diese mit einer maximalen Winkelbeschleunigung rotiert wird. Im unteren Bild zeigt die Rotation in die Bildebene hinein.



Daher heißt $\operatorname{rot} \vec{F}$ auch *Wirbeldichte* des Feldes \vec{F} .

2.2.12 Der Gaußsche Integralsatz

Sei $V \subset \mathbb{R}^3$ ein offenes Normalgebiet bzgl. aller 3 Achsen. Sei $F : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ stetig und $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$ stetig und beschränkt. Dann gilt der Satz von Gauss:

$$\int_{\partial V} \vec{F} d\vec{A} = \int_V \operatorname{div} \vec{F} d(x, y, z)$$

wobei das vektorielle Oberflächenelement $d\vec{A}$ nach *außen* gerichtet ist. Die skalare Größe

$$\operatorname{div} \vec{F} := \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

heißt *Divergenz* des Vektorfeldes \vec{F} .

Bemerkung: Ist \vec{F} differenzierbar so ist

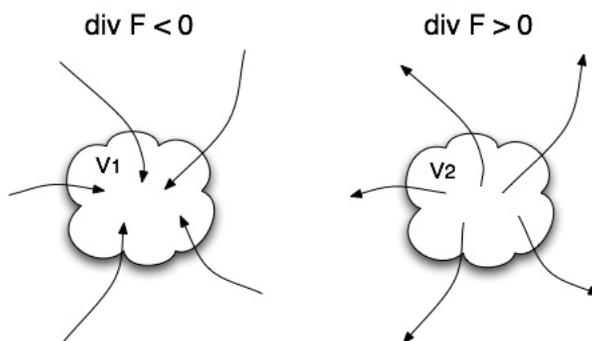
$$\operatorname{tr} (\vec{F}') = \operatorname{spur} (\vec{F}') = \operatorname{div} \vec{F}$$

Geometrische Interpretation Ist ∂V eine geschlossene, den räumlichen Bereich V begrenzende Fläche im Strömungsfeld \vec{F} , so gibt $\int_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{A}$ den Überschuss der pro Zeiteinheit aus dem Bereich V austretenden über der in V einströmenden Flüssigkeit an. Ist der Wert des Integrals positiv, so strömt pro Zeiteinheit mehr Flüssigkeit aus V heraus als hineinströmt. Ist der Wert des Integrals negativ, so gilt der umgekehrte Sachverhalt. Dies kann nur dadurch verursacht werden, dass im Inneren von V Quellen bzw. Senken liegen, aus denen Flüssigkeit quillt bzw. verschwindet.

Somit ist

$$\int_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{A}$$

ein Maß für die Ergiebigkeit des räumlichen Bereichs V . Oberer Sachverhalt wird in folgender Abbildung illustriert:



Spezialfall des Gaußschen Satzes Für $\vec{F}(x, y, z) = \vec{r}$ folgt durch den Gaußschen Satz

$$\int_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_V \operatorname{div} \vec{F} \, dV = \int_V \operatorname{div} \vec{r} \, dV = 3 \cdot \int_V dV = 3 \operatorname{vol}_3(V) \rightarrow \operatorname{vol}_3(V) = \frac{1}{3} \cdot \int_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{A}$$

Oberer stellt eine Formel zur Volumenberechnung mittels eines Oberflächenintegrals dar.

2.2.13 Greenscher Satz oder Gaußscher Satz in der Ebene

Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ ein Normalgebiet in beiden Richtungen, ∂B eine stückweise glatte Kurve und $\vec{F} = (P, Q) : \Omega \supset B \rightarrow \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$\int_{\partial B} (\vec{F} \cdot \vec{n}) \, ds = \int_B \operatorname{div} \vec{F} \, d(x, y), \quad \operatorname{div} \vec{F} := \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$$

wobei \vec{n} die nach außen gerichtete Normale von ∂B ist, d.h. $\vec{n} \cdot d\vec{s} = 0$ und $\|\vec{n}\|_2 = 1$. Es ergibt sich:

$$\vec{n} \, ds = \begin{pmatrix} dy \\ -dx \end{pmatrix}$$

Dabei durchläuft $d\vec{s}$ den Rand ∂B von oben betrachtet gegen die Uhrzeigerrichtung. In Komponenten geschrieben:

$$\int_{\partial B} (Pdy - Qdx) = \int_B \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) d(x, y)$$

Bemerkung: Oberer Satz erinnert zwar an eine 2-dimensionale Variation des Gaußschen Satzes, ergibt sich jedoch als Spezialfall des Stokesschen Integralsatzes!

Beweis: Setzen

$$\vec{L} := -F^y \vec{e}_x + F^x \vec{e}_y$$

und wenden den Stokesschen Satz auf B an

$$\begin{aligned} \int_B \operatorname{rot} \vec{L} \cdot \underbrace{d\vec{A}}_{\vec{e}_z dA} &= \int_B (\partial_x L^y - \partial_y L^x) \, dA = \int_B \underbrace{(\partial_x F^x + \partial_y F^y)}_{\operatorname{div} \vec{F}} \, dA \\ &= \int_{\partial B} \vec{L} \cdot d\vec{s} = \int_{\partial B} \begin{pmatrix} -F^y \\ F^x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dy \\ -dx \end{pmatrix} = \int_{\partial B} (F^x dy - F^y dx) = \int_{\partial B} \begin{pmatrix} F^x \\ F^y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dy \\ -dx \end{pmatrix} = \int_{\partial B} \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds \quad \square \end{aligned}$$

Spezialanwendung des Greenschen Satzes: Sei $\vec{F} = (P, Q) = (x, y)$. Dann ergibt sich

$$\int_{\partial B} (x dy - y dx) = \int_B 2 d(x, y) = 2 \operatorname{vol}_2(B) \Rightarrow \operatorname{vol}_2(B) = \frac{1}{2} \cdot \int_{\partial B} (x dy - y dx)$$

Durch Integration über den Rand ∂B kann also der Flächeninhalt von B berechnet werden.

2.3 Weitere Differential- und Integralformen

2.3.1 Nabla-Kalkül

Man definiert den *Nabla Operator*

$$\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

für Funktionen $\varphi : G \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\vec{F} : G \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ und man setzt

$$\nabla \varphi := \operatorname{grad} \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)$$

$$\nabla \cdot \vec{F} := \operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial F^x}{\partial x} + \frac{\partial F^y}{\partial y} + \frac{\partial F^z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \vec{F} := \operatorname{rot} \vec{F} = \left(\frac{\partial F^z}{\partial y} - \frac{\partial F^y}{\partial z}, \frac{\partial F^x}{\partial z} - \frac{\partial F^z}{\partial x}, \frac{\partial F^y}{\partial x} - \frac{\partial F^x}{\partial y} \right)$$

2.3.2 Definition: Laplace Operator

Zu 2-mal stetig differenzierbaren Funktionen $\varphi : G \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\vec{F} : G \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert man den *Laplace Operator*

$$\Delta \varphi := \operatorname{div} (\operatorname{grad} \varphi) = \nabla \cdot (\nabla \varphi) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

und analog

$$\Delta \vec{F} := (\Delta F^x, \Delta F^y, \Delta F^z)$$

Doppelte Anwendung von ∇

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = \nabla \times (\nabla \varphi) = 0$$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{F} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$$

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \nabla \cdot (\nabla \varphi) = \Delta \varphi$$

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{F} = \Delta \vec{F} + \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{F}$$

Anwendung von ∇ auf Produkte

$$\text{grad}(\varphi\psi) = \varphi \text{grad } \psi + \psi \text{grad } \varphi$$

$$\text{div}(\varphi\vec{F}) = \nabla(\varphi\vec{F}) = (\text{grad } \varphi) \cdot \vec{F} + \varphi \text{div } \vec{F}$$

$$\text{rot}(\varphi\vec{F}) = \varphi \text{rot } \vec{F} + (\text{grad } \varphi) \times \vec{F}$$

$$\text{grad}(\vec{F} \cdot \vec{G}) = \vec{F} \times \text{rot } \vec{G} + \vec{G} \times \text{rot } \vec{F} + (\vec{G} \cdot \nabla) \vec{F} + (\vec{F} \cdot \nabla) \vec{G}$$

$$\text{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \text{rot } \vec{F} - \vec{F} \text{rot } \vec{G}$$

Merkregel: Für solche Formeln sind die Operationen

- a) Produktregel der Differentialrechnung

$$\nabla * (A \circ B) = \nabla * \left(\begin{smallmatrix} \downarrow \\ A \circ B \end{smallmatrix} \right) + \nabla * \left(A \circ \begin{smallmatrix} \downarrow \\ B \end{smallmatrix} \right)$$

- b) Algebraische Umformung nach den Regeln der Vektoralgebra so dass der ∇ Operator direkt beim \downarrow steht.

Vorsicht bei der Anwendung!

Beispiel für $*$:= \cdot Skalarprodukt und \circ := \times Kreuzprodukt.

$$\nabla \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = \nabla \cdot \left(\begin{smallmatrix} \downarrow \\ \vec{F} \times \vec{G} \end{smallmatrix} \right) + \nabla \cdot \left(\vec{F} \times \begin{smallmatrix} \downarrow \\ \vec{G} \end{smallmatrix} \right) = (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{G} - \nabla \cdot \left(\begin{smallmatrix} \downarrow \\ \vec{G} \times \vec{F} \end{smallmatrix} \right) = (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{G} - \vec{F} \cdot (\nabla \times \vec{G})$$

2.3.3 Integralformen im \mathbb{R}^3

2.3.4 Satz: Gaußscher Satz in div-, grad- und rot- Form

- div-Form

$$\int_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_V \text{div } \vec{F} \, dV$$

- grad-Form

$$\int_{\partial V} \varphi \, d\vec{A} = \int_V \text{grad } \varphi \, dV$$

- rot-Form

$$\int_{\partial V} d\vec{A} \times \vec{F} = \int_V \text{rot } \vec{F} \, dV$$

Dabei sind $\varphi : G \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\vec{F} : G \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar und $V \subset G$ ein Gauß-Bereich, d.h es gilt die div-Form.

Also: Raumintegrale über div, grad, rot, lassen sich in Flächenintegrale umwandeln.

2.3.5 Satz: Stokesscher Satz in rot-, grad- und ∇ -Form

- rot-Form

$$\int_{\partial \mathcal{O}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\mathcal{O}} \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{A}$$

- grad-Form

$$\int_{\partial \mathcal{O}} \varphi \, d\vec{s} = \int_{\mathcal{O}} d\vec{A} \times \text{grad } \varphi$$

- ∇ -Form

$$\int_{\partial\mathcal{O}} d\vec{s} \times \vec{F} = \int_{\mathcal{O}} (d\vec{A} \times \nabla) \times \vec{F}$$

Dabei sind die Voraussetzungen von φ, \vec{F} und \mathcal{O} so gegeben dass die rot-Form gilt.

Merkregel für die beiden Sätze:

Gauß

$$\int_{\partial V} d\vec{A} * = \int_V dV \nabla *$$

Stokes:

$$\int_{\partial\mathcal{O}} d\vec{s} * = \int_{\mathcal{O}} d\vec{A} \times \nabla *$$

Dabei darf * in jeder Gleichung wahlweise durch folgende Ausdrücke ersetzt werden: $*$:= $\cdot \vec{F}$, φ , $\times \vec{F}$

2.3.6 Greensche Formeln

Seien $\varphi, \psi : G \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ 2-mal stetig differenzierbar und $V \subset G$.

- Erste Greensche Formel

$$\int_{\partial V} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} dA = \int_V (\varphi \Delta \psi + \text{grad } \varphi \text{ grad } \psi) dV$$

wobei \vec{n} der Einheits-Außennormalenvektor auf ∂V ist und

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = \text{grad } \psi \cdot \vec{n}$$

(vgl. Analysis II)

- Zweite Greensche Formel

$$\int_{\partial V} \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dA = \int_V (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) dV$$

2.4 Wirbel- und Quellenfreie Vektorfelder

2.4.1 Definition: Gradientenfeld (Potentialfeld)

Sei $G \subset \mathbb{R}^3$. Dann heißt eine Funktion $\vec{F} : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein *Vektorfeld* und eine Funktion $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}$ ein *Skalarfeld*.

Sei $G \subset \mathbb{R}^3$ offen. Dann heißt ein Vektorfeld $\vec{F} : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein *Gradientenfeld* : \Leftrightarrow

$$\exists \varphi : G \rightarrow \mathbb{R} : \vec{F} = \text{grad } \varphi$$

Das skalare Feld φ ist ein *Potential* von F .

2.4.2 Definition: Wegunabhängigkeit

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, d.h eine offene und zusammenhängende Menge, und $F : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Das

Wegintegral $\int_{\gamma} F d\vec{s}$ heißt in G *unabhängig vom Weg* γ (oder einfach *Wegunabhängig*) : \Leftrightarrow

$$\forall A, B \in G \quad \forall \gamma : [a, b] \rightarrow G \text{ mit } \gamma(a) = A, \gamma(b) = B$$

hängt $\int_{\gamma} F d\vec{s}$ nur von den Punkten A und B , aber nicht vom Weg γ ab.

Schreibweise:

$$\int_{\gamma} F d\vec{s} = \int_A^B F d\vec{s}$$

2.4.3 Satz:

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $F : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetiges Vektorfeld. Dann gilt:

F ist ein Gradientenfeld $\Leftrightarrow \int_{\gamma} F d\vec{s}$ ist wegunabhängig.

Bemerkungen:

a) Es gilt

$$\int_{\gamma} \text{grad } \varphi d\vec{s} = \int_A^B \text{grad } \varphi d\vec{s} = \varphi(B) - \varphi(A)$$

für jeden Stückweise stetig differenzierbaren Weg γ in einem Gebiet G mit Anfangspunkt A und Endpunkt B und jedes stetig differenzierbare Skalarfeld $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}$.

b) Sei $F : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Gradientenfeld auf einem Gebiet G . Dann erhält man alle Stammfunktionen (Skalarfelder) $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}$ von F , d.h. $F = \text{grad } \varphi$, in der Form $\varphi = \varphi_0 + C$, $C \in \mathbb{R}$ mit $F = \text{grad } \varphi_0$.

Beispiel: Gravitationsfeld:

$$G = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, F : G \rightarrow \mathbb{R}^3, F(\vec{r}) = -C \frac{\vec{r}}{r^3}, r = \|\vec{r}\|_2$$

Es gilt:

$$F(\vec{r}) = \text{grad} \left(\frac{C}{r} \right)$$

2.4.4 Ein praktisches Kriterium für Gradientenfelder

Ein praktisches *Differentiationskriterium* dafür, daß ein Vektorfeld ein Gradientenfeld ist, ist das folgende:

a) **Notwendiges Kriterium:** Sei

$$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix} : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

ein stetig differenzierbares Gradientenfeld auf der offenen Menge G . Dann gilt:

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_k} = \frac{\partial F_k}{\partial x_j}, k, j = 1, \dots, n$$

Vgl.: Schwarzer Satz, Analysis II

b) **Hinreichendes Kriterium:** Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ eine offene und *sternförmige* Menge, d.h.

$$\exists a \in G : \forall (x+a) \in G : \forall t \in [0, 1] : a+tx \in G$$

und $F : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld mit

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_i} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}, j, i = 1, \dots, n$$

Dann ist F ein Gradientenfeld.

2.4.5 Praktische Bestimmung vom Potential φ

Sei o.B.d.A. $n = 2$ und $F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} : G \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein Gradientenfeld, mit $F = \text{grad } \varphi$.

1. Methode: Polygonzug γ in Richtung der Koordinatenachsen in G oder anderen passenden Weg suchen.

$$\varphi(x) = \int_a^x F d\vec{s}, \quad a = (a_1, a_2), \quad x = (x_1, x_2)$$

wobei

$$\begin{aligned} \gamma &= \gamma_1 \oplus \gamma_2 \\ \gamma_1(t) &= (t, a_2), \quad t \in [a_1, x_1] \\ \gamma_2(t) &= (x_1, t), \quad t \in [a_2, x_2] \end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \int_a^x F d\vec{s} = \int_{\gamma} F d\vec{s} = \int_{\gamma_1} F d\vec{s} + \int_{\gamma_2} F d\vec{s} = \int_{a_1}^{x_1} F(\gamma_1(t)) \dot{\gamma}_1(t) dt + \int_{a_2}^{x_2} F(\gamma_2(t)) \dot{\gamma}_2(t) dt \\ &= \int_{a_1}^{x_1} F_1(t, a_2) dt + \int_{a_2}^{x_2} F_2(x_1, t) dt \end{aligned}$$

2. Methode: Lösen von partiellen DGL

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) = F_1(x), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x) = F_2(x)$$

$$\rightarrow \varphi(x_1, x_2) = \int F_1(x_1, x_2) dx_1 + g(x_2)$$

$$\rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2} \int F_1(x_1, x_2) dx_1 + \frac{\partial g(x_2)}{\partial x_2} = \int \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x_1, x_2) dx_1 + g'(x_2) = \int \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) dx_1 + g'(x_2) \stackrel{!}{=} F_2(x_1, x_2)$$

$$\rightarrow g'(x_2) = F_2(x_1, x_2) - \int \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) dx_1 = F_2(x_1, x_2) - F_2(x_1, x_2) + h(x_2) = h(x_2)$$

$$\rightarrow g(x_2) = \int h(x_2) dx_2$$

2.4.6 Definition: Zusammenziehbare Kurve

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Eine geschlossene Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ heißt in G *zusammenziehbar* $:\Leftrightarrow$

Es existiert eine stetige Funktion $h : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow G$ mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} h(t, 0) &= \gamma(t) : t \in [a, b] \\ h(t, 1) &= y_0 \in G \quad t \in [a, b], \quad y_0 : \text{const} \\ h_s(t) &:= h(t, s), \quad s \in [0, 1] \text{ sind geschlossen} \\ \rightsquigarrow h_0 &= h(\cdot, 0) = \gamma, \quad h_1 = h(\cdot, 1) = y_0 \end{aligned}$$

2.4.7 Definition: Einfach zusammenhängendes Gebiet

Ein Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$ heißt *einfach zusammenhängend* $:\Leftrightarrow$

Jede geschlossene Kurve in G ist zusammenziehbar. Anschaulich ausgedrückt handelt es sich um Gebiete ohne durchgehende Löcher.

Beispiele:

- Der Kreis

$$K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$$

ist einfach zusammenhängend.

- Der *durchbohrte* Kreis

$$K \setminus \{0\}$$

ist nicht einfach zusammenhängend.

- Die Menge

$$K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, (x, y, z) \neq (0, 0, 0)\}$$

ist einfach zusammenhängend.

Der folgende Satz ist eine Verallgemeinerung des vorigen hinreichenden Kriteriums (2) über die Existenz von Potentialen.

2.4.8 Satz: Potentialkriterium

- a) Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $F : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$\exists \varphi : G \rightarrow \mathbb{R} : F = \text{grad } \varphi \Leftrightarrow \frac{\partial F^i}{\partial x_k} = \frac{\partial F^k}{\partial x_i}, \quad i, k = 1, \dots, n$$

(vgl. Integrabilitätsbedingung)

- b) Das Potential φ ist bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt.

Bemerkungen:

- Für $n = 3$ bedeutet obiger Satz:

$$\exists \varphi : F = \text{grad } \varphi \Leftrightarrow \text{rot } F = 0$$

Man sagt F ist wirbelfrei wenn $\text{rot } F = 0$ ist. Damit besagt obiger Satz für einfach zusammenhängende Gebiete: Ein wirbelfreies Vektorfeld hat ein Potential.

- Die Voraussetzung "einfach zusammenhängend" ist nicht überflüssig!

Beispiel: Das Vektorfeld

$$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad F(x, y) = \frac{1}{r^2} \cdot \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ist wirbelfrei. Jedoch gilt für den Weg γ um den Einheitskreis um 0:

$$\int_{\gamma} F d\vec{s} = 2\pi \neq 0$$

- Man kann zeigen, dass der Stokessche Satz:

$$\int_{\partial \mathcal{O}} F d\vec{s} = \int_{\mathcal{O}} \text{rot } F d\vec{A}$$

auch für einfach zusammenhängende Gebiete gilt.

Der obige Satz kann für Vektorfelder $F : G \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ wie folgt formuliert werden:

2.4.9 Satz über Wirbelfreie Felder

Sei $F : G \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld in einem einfach zusammenhängendem Gebiet G . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- $\operatorname{rot} F = 0$
- $\int_{\gamma} F d\vec{s} = 0$ für alle geschlossene, stückweise differenzierbare Wege $\gamma : [a, b] \rightarrow G$
- $\int_A^B F d\vec{s}$ ist unabhängig vom Weg zwischen A und B
- $\exists \varphi : G \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F = \operatorname{grad} \varphi$, d.h. F ist ein Gradientenfeld.

2.4.10 Definition: Quellenfreiheit und Vektorpotential

Sei $F : G \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld. Wenn:

$$\exists \mathcal{A} : G \rightarrow \mathbb{R}^3 : F = \operatorname{rot} \mathcal{A}$$

so heißt \mathcal{A} ein *Vektorpotential* von F . F heißt ein *Wirbelfeld* (bzgl. \mathcal{A}).
 F heißt *Quellenfrei* $\Leftrightarrow \operatorname{div} F = 0$ in G

2.4.11 Satz: Existenzsatz zu Vektorpotentialen

- Sei $F : G \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einem sternförmigen Gebiet G . Dann gilt:
 $\operatorname{div} F = 0 \Leftrightarrow \exists \mathcal{A} : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\operatorname{rot} \mathcal{A} = F$
- Zwei Vektorpotentiale $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ von F unterscheiden sich nur durch ein Gradientenfeld. Das heisst:

$$\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_1 + \operatorname{grad} \varphi$$

Bemerkung: Zu $F : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\operatorname{div} F = 0$ ist z.B. das Feld $\mathcal{A} : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\mathcal{A}(\vec{r}) := \int_0^1 t \cdot (F(t\vec{r}) \times \vec{r}) dt$$

ein Vektorpotential von F .

2.4.12 Satz über quellenfreie Felder:

Sei $F : G \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine 2-mal stetig differenzierbare Vektorfunktion in einem einfach zusammenhängenden Gebiet G . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- $\operatorname{div} F = 0$ in G
- $\int_{\mathcal{O}} F d\vec{A} = 0$ für jede geschlossene und stückweise glatte Oberfläche $\mathcal{O} \subset G$
- $\int_{\mathcal{O}} F d\vec{A}$ ist abhängig von der Randkurve $\partial\mathcal{O}$ von \mathcal{O} , aber unabhängig von \mathcal{O} über die Randkurve.

2.4.13 Abschließende Bemerkungen über die Gaußschen Integralsätze in \mathbb{R}^n

Sei $V \subset \mathbb{R}^n$ ein zusammenhängendes Normalgebiet, wobei ∂V eine glatte $(n-1)$ -dimensionale Fläche sei. Dabei ist $d\vec{A}$ das Oberflächenelement. Sei

$$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix} : V \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \operatorname{div} F := \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_k}{\partial x_k}$$

ein 2-mal stetig differenzierbares Vektorfeld auf V und

$$\Phi : B \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \partial V \subset \mathbb{R}^n, \quad \Phi'(t) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial t_{n-1}} \right) \in \mathcal{M}(n \times (n-1))$$

eine Parametrisierung von ∂V , mit

$$\operatorname{Rang} \Phi'(t) = n-1$$

Sei ferner $\nu(t) \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\|\nu(t)\|_2 = 1, \quad \nu(t) \perp \operatorname{span} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial t_{n-1}} \right\}, \quad \det \left(\nu(t), \frac{\partial \Phi}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial t_{n-1}} \right) > 0$$

Dann heißt $\nu(t)$ äußerer *Normaleneinheitsvektor* an ∂V , und

$$d\vec{A} = \nu \sqrt{\operatorname{gr}(\Phi'(t))} dt, \quad dt := d(t_1, \dots, t_{n-1})$$

das *vektorielle Oberflächenelement* an ∂V . Man definiert ferner:

$$\int_{\partial V} F d\vec{A} := \int_B (F\nu) \sqrt{\operatorname{gr}(\Phi'(t))} dt$$

Dann gilt:

$$\int_{\partial V} F d\vec{A} = \int_V \operatorname{div} F dV$$

3 Partielle Differentialgleichungen

3.1 Einführung

Eine partielle Differentialgleichung (PDG) ist ein Ausdruck der Form

$$F\left(x_1, \dots, x_n, U, \frac{\partial U}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial U}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_1}, \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^2 U}{\partial x_n \partial x_n}, \dots\right) = 0$$

Die *Ordnung* einer PDG ist der Grad der höchsten Ableitung. Zum Beispiel ist die allgemeinste Form einer PDG 1. Ordnung bzw. 2. Ordnung in 2 unabhängigen Variablen folgender Ausdruck:

$$F(x, y, U, \partial_x U, \partial_y U) = 0$$

bzw.

$$F(x, y, U, \partial_x U, \partial_y U, \partial_{xy} U, \partial_{x^2} U, \partial_{y^2} U) = 0$$

Gesucht sind Funktionen $U = U(x, y) : G \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$F(x, y, U(x, y), \partial_x U(x, y), \partial_y U(x, y)) = 0 \quad \forall (x, y) \in G$$

bzw.

$$F(x, y, U(x, y), \partial_x U(x, y), \partial_y U(x, y), \partial_{xy} U(x, y), \partial_{x^2} U(x, y), \partial_{y^2} U(x, y)) = 0 \quad \forall (x, y) \in G$$

Beispiele aus der Physik

- Stoßwellen 1. Ordnung

$$\partial_x U + U \partial_y U = 0$$

- Laplace Gleichung 2. Ordnung

$$\Delta U = \partial_{xx} U + \partial_{yy} U = 0$$

- Schrödinger Gleichung 2. Ordnung

$$\partial_t U = i \partial_{x^2} U$$

- Korteweg de Vreis Gleichung (z.B bei Solitonen)

$$\partial_t U = \partial_{x^3} U + 6U \partial_x U$$

Bemerkung: Die Lösung einer PDG enthält im Gegensatz zu gewöhnlichen DGL statt Konstanten, willkürliche Funktionen als Parameter. Um die willkürlichen Funktionen einzuschränken, werden Anfangs- und Randbedingungen festgelegt.

Eine wichtige Klasse von PDG sind lineare PDG. Die allgemeinste Form einer linearen PDG 1. Ordnung bzw. 2. Ordnung auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$ hat die Gestalt

a)

$$\mathcal{L}U := \sum_{i=1}^n a_i(x) U_{x_i} + \beta(x) U = \rho(x), \quad x = (x_1, \dots, x_n)$$

b)

$$\mathcal{L}U := \sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x) \partial_{x_i x_k} U + \sum_{i=1}^n \beta_i(x) \partial_{x_i} U + \gamma(x) U = \rho(x)$$

Die PDG (a) bzw. (b) heißen *homogen* falls $\rho(x) \equiv 0$, sonst *inhomogen*. Gesucht sind stetig differenzierbare Funktionen $U = U(x_1, \dots, x_n) : G \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\mathcal{L}U = \rho(x)$. Der Differentialoperator \mathcal{L} ist hier linear, d.h

$$\mathcal{L}(\lambda U + \mu \Phi) = \lambda \mathcal{L}U + \mu \mathcal{L}\Phi$$

Somit ist $\lambda \Gamma + \mu \Phi$ auch Lösung der homogenen Gleichung $\mathcal{L}U = 0$ falls Γ und Φ Lösungen sind.

Wegen des Schwarzschen Satzes hat man in (b) $\partial_{x_i x_k} U = \partial_{x_k x_i} U$. Somit können wir in (b) o.B.d.A $a_{ik}(x) = a_{ki}(x)$, $x \in G$ annehmen, und setzen

$$\mathcal{A} := (a_{ik}(x))_{i,k=1}^n$$

wobei \mathcal{A} eine symmetrische Matrix ist!

3.1.1 Definition: Klassifizierung von linearen PDG 2. Ordnung

Die linearen PDG 2. Ordnung

$$\mathcal{L}U := \sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x) \partial_{x_i x_k} U + \sum_{i=1}^n \beta_i(x) \partial_{x_i} U + \gamma(x)U = \rho(x)$$

mit $a_{ik}(x) = a_{ki}(x)$ heissen

- Elliptisch* falls $\mathcal{A} = (a_{ik}(x))_{i,k=1}^n$ positiv definit bzw. negativ definit in G ist.
- Hyperbolisch* falls \mathcal{A} indefinit in G ist.
- Parabolisch* falls \mathcal{A} semidefinit in G ist.

Bemerkung zur Definitheit: Eine quadratische, symmetrische (bzw. hermitesche) Matrix $\mathcal{A} = (a_{ik})$ ist:

- Genau dann positiv definit, wenn alle Eigenwerte positiv sind.
- Genau dann negativ definit, wenn alle Eigenwerte negativ sind.
- Genau dann positiv (bzw. negativ) semidefinit, wenn alle Eigenwerte nicht negativ (bzw. nicht positiv) sind.
- Genau dann indefinit, wenn es sowohl negative als auch positive Eigenwerte gibt.

Alternativ ist (a_{ik}) :

- Genau dann positiv definit, wenn alle Hauptminoren positiv sind.
- Genau dann negativ definit, wenn alle Hauptminoren von $-\mathcal{A}$ positiv sind, d.h alle ungeraden Hauptminoren von \mathcal{A} sind negativ, alle geraden sind positiv.

Drei physikalisch interessante Grundlagen

- **Potentialgleichung:** Elliptisch

$$\Delta U = \rho(x)$$

- **Laplace Gleichung:** Homogene Potentialgleichung.
- **Poissongleichung:** Inhomogene Potentialgleichung.
- **Wellengleichung:** Hyperbolisch

$$\Delta U - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \rho(x, t), \quad U = U(x, t), \quad A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- **Wärmeleitungsgleichung:** Parabolisch

$$\Delta U - \frac{\partial U}{\partial t} = \rho(x, t), \quad u = u(x, t), \quad A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}((n+1) \times (n+1))$$

3.1.2 Definition: Allgemeine Lösung einer Partiellen Differentialgleichung

Wir nennen für $G \subset \mathbb{R}^n$

$C^k(G) := \{f : G \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ und sämtliche partielle Ableitungen bis zur } k\text{-ten Ordnung sind stetig}\}$

$C^k(\text{cl}G) := \{f : G \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ und sämtliche part. Abl. bis zur } k\text{-ten Ordnung lassen sich auf } \text{cl}G \text{ stetig fortsetzen}\}$

Die Menge aller Funktionen $U \in C^2(G)$ bzw. $U \in C^2(G \times \mathbb{R}^+)$ die der entsprechenden partiellen Differentialgleichung genügen, heißt *allgemeine Lösung der PDG*. Um Eindeutigkeit der Lösung zu erzielen, schreibt man zusätzliche Bedingungen vor.

- **Anfangsbedingungen (AB)**

$$U(x, 0) = \varphi(x) \text{ Wärmeleitungsgleichung}$$

$$U(x, 0) = \varphi(x), \partial_t U(x, 0) = \psi(x) \text{ Wellengleichung}$$

- **Randbedingungen (RB) :**

Dirichletproblem oder RB 1. Art (RB1):

$$u(x, t) = f(x, t), x \in \partial G$$

Neumannproblem oder RB 2. Art (RB2) :

$$\frac{\partial U}{\partial n}(x, t) = f(x, t), x \in \partial G$$

wobei \vec{n} die äußere Normale auf G und $\frac{\partial U}{\partial n}$ die Richtungsableitung von U nach \vec{n} ist.

Robertproblem oder RB 3. Art (RB3) :

$$\frac{\partial U}{\partial n}(x, t) + f(x, t)u(x, t) = f_2(x, t), x \in \partial G$$

3.1.3 Interpretation von PDG, AB und RB

Physikalische Aufgaben erfordern 3 Typen von Beziehungen.

- a) Die PDG beschreibt die physikalische Erscheinung.
- b) Die RB beschreiben den physikalischen Prozess auf dem Rand.
- c) Die AB beschreiben en Zustand des Systems zu Beginn des Prozesses.

Folgende mathematische Probleme erheben sich:

- a) Existenz von Lösungen.
- b) Eindeutigkeit von Lösungen.
- c) Korrektheit von Lösungen, d.h die Lösungen hängen stetig von den AB bzw. RB ab.
- d) Lösungsmethoden: Beispiele
 - Potentialmethode : Hilfsmittel aus der Vektoranalysis.
 - Fouriiermethode : Hilfsmittel aus der Fourieranalysis.
 - Distributionstheorie.

3.2 Lineare partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung

3.2.1 Vorgehensweise

Eine lineare partielle Differentialgleichung 1. Ordnung in 2. Variablen hat die Gestalt:

$$a(x, y)U_x + b(x, y)U_y + c(x, y)U = d(x, y), \quad U_x := \frac{\partial U}{\partial x}$$

Wir betrachten zunächst die folgende homogene PDG

$$a(x, y)U_x + b(x, y)U_y = 0, \quad a \neq 0 \quad (1)$$

Die Gleichung besagt, dass der Vektor

$$h := \begin{pmatrix} a(x, y) \\ b(x, y) \end{pmatrix}$$

senkrecht auf dem Gradienten $\text{grad } U = (U_x, U_y)$ steht.

Oder: Die Richtungsableitung in Richtung h ist 0:

$$\langle \text{grad } U(x, y), (a(x, y), b(x, y)) \rangle = 0$$

Die Kurven $y = y(x)$ in der (x, y) -Ebene mit $h(x, y)$ als Tangentenvektor haben die Steigung $\frac{b}{a}$, d.h.

$$y'(x, y) = \frac{b(x, y)}{a(x, y)} \quad (2)$$

Man nennt die Lösungen der oberen gewöhnlichen DGL *Charakteristiken* der PDG. Ist $y = \varphi(x, C)$, mit C als die resultierende Integrationskonstante (freie Parameter), eine Lösung der DGL 2, so ist eine Lösung $U = U(x, y)$ der PDG 1 auf jeder dieser Kurven $y = \varphi(x, C)$ konstant, da

$$\frac{d}{dx}U(x, \varphi(x, C)) = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = U_x + U_y \frac{b}{a} = \frac{aU_x + bU_y}{a} = 0$$

Demnach folgt

$$U(x, \varphi(x, C)) = U(x_0, \varphi(x_0, C)) \quad \forall x$$

wobei C ein beliebiger Parameter ist. Schreibt man die Charakteristiken von 2 in der impliziten Form $C = \Psi(x, y)$ mit einem festen Parameter C , so hat die Lösung der PDG 1 notwendigerweise die Form

$$U(x, y) = U(x_0, \varphi(x_0, \Psi(x, y))) = f(\Psi(x, y))$$

Ferner gilt, für eine beliebige Funktion $f \in C^1$, ist

$$U(x, y) = f(\Psi(x, y))$$

die allgemeine Lösung der PDG 1.

Zusammengefasst hat man: Ist $\Psi(x, y) = C$, mit C als Parameter, die allgemeine Lösung von

$$y' = \frac{b(x, y)}{a(x, y)}$$

so ist

$$U(x, y) = f(\Psi(x, y))$$

wobei $f \in C^1$ eine beliebige Funktion ist, die allgemeine Lösung der PDG

$$a(x, y)U_x + b(x, y)U_y = 0$$

Allgemeine homogene PDG: Wir betrachten jetzt die allgemeine homogene DGL

$$a(x, y)U_x + b(x, y)U_y + c(x, y)U = 0 \rightarrow a \frac{U_x}{U} + b \frac{U_y}{U} + c = 0$$

Wir setzen $V := \ln U$ und erhalten für V die PDG

$$aV_x + bV_y + c = 0$$

Die allgemeine Lösung letzterer PDG ist: $V = V^{(h)} + V^{(i)}$, wobei $V^{(h)}$ die allgemeine Lösung der homogenen PDG $aV_x + bV_y = 0$ und $V^{(i)}$ eine spezielle Lösung der inhomogenen PDG $aV_x + bV_y + c = 0$ ist.

Allgemein hat man folgendes: Sei $\mathcal{L}U = h$ eine lineare inhomogene PDG, W eine beliebige Lösung von $\mathcal{L}U = h$ und U_0 eine spezielle Lösung von $\mathcal{L}U = h$. Dann ist $U := W - U_0$ eine Lösung der homogenen PDG $\mathcal{L}U = 0$ da

$$\mathcal{L}U = \mathcal{L}(W - U_0) = \mathcal{L}W - \mathcal{L}U_0 = h - h = 0$$

Demnach ist $W = U + U_0$ die allgemeine Lösung von $\mathcal{L}U = h$, wobei eben U genau die allgemeine Lösung der homogenen PDG ist.

3.2.2 Methode der Koordinatentransformation

Zur Lösung von

$$a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad a, b : \text{const}, \quad a \neq 0$$

machen wir den Ansatz:

$$u(x, y) = v(\xi, \eta)$$

wobei

$$\xi = ax + by, \quad \eta = \alpha x + \beta y$$

Wegen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a \frac{\partial v}{\partial \xi} + \alpha \frac{\partial v}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = b \frac{\partial v}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial v}{\partial \eta}$$

bekommt man

$$0 = a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} = a \left(a \frac{\partial v}{\partial \xi} + \alpha \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) + \left(b \frac{\partial v}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) = (a^2 + b^2) \frac{\partial v}{\partial \xi} + (a\alpha + b\beta) \frac{\partial v}{\partial \eta}$$

Wir wählen die α, β so dass der zweite Term verschwindet, z.B:

$$\alpha = b, \quad \beta = -a \rightarrow \xi = ax + by, \quad \eta = bx - ay$$

weshalb gilt

$$a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial v}{\partial \xi} = 0 \Leftrightarrow v(\xi, \eta) = f(\eta)$$

Damit ist die allgemeine Lösung der PDG die Funktion

$$u(x, y) = f(bx - ay)$$

3.3 Lineare partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung

Im folgenden sei $G \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ ein zusammenhängendes Normalgebiet. Die Integralsätze (Gauss, Stokes) sind anwendbar und es hat einen Sinn von äußeren Normalen \vec{n} bzgl. des Randes ∂G von G zu sprechen, abgesehen von einigen Ecken & Kanten. Wir betrachten im folgenden die Poissongleichung:

$$\Delta U = \rho(x)$$

3.3.1 Die Laplace-Poisson Gleichung (Potentialgleichung)

Hauptinhalt dieses Abschnittes ist das Dirichletproblem (DRP). Dabei betrachten wir die Poissongleichung $\Delta U = \rho$ in G bzw. die Laplace Gleichung $\Delta U = 0$ mit $U|_{\partial G} = h$. Folgende Randwertprobleme erheben sich: Seien $\rho \in \mathcal{C}^0(\text{cl}G)$ und $h \in \mathcal{C}^0(\partial G)$.

- a) Gesucht ist eine Funktion $u \in \mathcal{C}^2(\text{cl}G)$ des *Dirichletproblems*, d.h

$$\Delta U(x) = \rho(x) \text{ in } G, \quad U|_{\partial G} = h(x)$$

- b) Gesucht ist eine Funktion $U \in \mathcal{C}^2(\text{cl}G)$ des *Neumannproblems*, d.h

$$\Delta U(x) = \rho(x) \text{ in } G, \quad \frac{\partial U}{\partial n}|_{\partial G} = h(x)$$

- c) Gesucht ist eine Funktion $U \in \mathcal{C}^2(\text{cl}G)$ des *Robynproblems*, d.h

$$\Delta U(x) = \rho(x) \text{ in } G, \quad \left(\frac{\partial U}{\partial n} + a(x)U \right)|_{\partial G} = h(x), \quad a \in \mathcal{C}^0(\text{cl}G)$$

Unter den obigen Voraussetzungen besitzt

- Das Dirichletproblem höchstens eine Lösung.
- Das Neumannproblem bis auf eine Konstante höchstens eine Lösung.
- Das Robynproblem höchstens eine Lösung, falls $a(x) > 0$ in $\text{cl}G$ ist.

Im folgenden betrachten wir das Dirichletproblem. Unter gewissen Abschwächungen an die Funktion U können weitere Eindeutigkeitsaussagen gemacht werden. Dazu am Ende des Abschnitts: Existenzbeweise von Lösungen sind in der Regel kompliziert.

Hilfsmittel aus der Vektoranalysis

- Gaußscher Satz
- Greensche Formeln.
- Parameterabhängige Integrale (siehe folgendes Lemma).

3.3.2 Lemma über parameterabhängige Integrale

Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und Jordan-Messbar, mit $g \in \mathcal{R}(B)$. Sei $F : C \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(y) := \int_B f(x, y)g(x) dx$$

mit $f : B \times C \rightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt:

- Ist f stetig auf $B \times C$, so ist auch F stetig in $\text{cl}C$.
- Ist C offen, mit

$$f, \frac{\partial f}{\partial y_j} \in \mathcal{C}^0(B \times C)$$

so gilt

$$\frac{\partial F}{\partial y_j} \in \mathcal{C}^0(C)$$

3.3.3 Grundlösungen und Darstellungsformen

Gesucht sind Lösungen $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ mit $\Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, die nur von $r = \|x\| = \|x\|_2$ abhängen. Mit dem Ansatz $u(x) = v(r)$ bekommt man

$$\Delta u = v''(r) + \frac{n-1}{r} \cdot v'(r) \stackrel{!}{=} 0$$

Lösungen dieser gewöhnlichen DGL sind

$$v(r) = \begin{cases} \frac{1}{r^{n-2}} & : n > 2 \\ \ln r & : n = 2 \end{cases}$$

Sei

$$B_1 := \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$$

die Einheitskugel im \mathbb{R}^n und

$$\omega_n := \text{vol}_{n-1}(\partial B_1)$$

der Inhalt der Oberfläche ∂B_1 von B_1 . Die Funktion

$$N_a : \mathbb{R}^n \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$$

definiert durch

$$N_a(x) := \begin{cases} \frac{-1}{(n-2)\omega_n} \cdot \frac{1}{\|x-a\|^{n-2}} & : n \geq 3 \\ \frac{1}{2\pi} \cdot \ln \|x-a\| & : n = 2 \end{cases}$$

heißt *Newton-Potential* oder auch *Singularitätenlösung*. Es gilt: $\Delta N_a = 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus \{a\}$ und

$$\text{grad } N_a(x) = \frac{1}{\omega_n} \cdot \frac{x-a}{\|x-a\|^n}, \quad n \geq 2$$

3.3.4 Lemma B: Lemma über das Newton-Potential

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $a \in G$, $u \in \mathcal{C}^1(G)$. Dann gilt:

$$u(a) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\|x-a\|=\varepsilon} \left(u(x) \frac{\partial N_a(x)}{\partial n} - N_a(x) \frac{\partial u(x)}{\partial n} \right) dA$$

mit n als den äußeren Normaleneinheitsvektor an

$$B_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x-a\| \leq \varepsilon\}$$

3.3.5 Satz: Darstellungsformel

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein zusammenhängendes Normalgebiet, $V \subset G$ kompakte Menge (Gaußscher Bereich) mit glattem Rand und $u \in \mathcal{C}^2(G)$. Dann gilt:

$$D := \int_{\partial V} \left[u(x) \frac{\partial N_a(x)}{\partial n} - N_a \frac{\partial u(x)}{\partial n} \right] dA + \int_V N_a(x) \Delta u(x) dV = \begin{cases} u(a) & : a \in V^\circ \\ 0 & : a \in \mathbb{R}^n \setminus V \end{cases}$$

Bemerkung: Die obige Formel gilt auch für $V = G$ und $a \in G$, falls $u \in \mathcal{C}^2(\text{cl}G)$ ist.

3.3.6 Definition: Grundlösung

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein zusammenhängendes Normalgebiet im \mathbb{R}^n und $a \in G$. Dann heißt

$$\gamma_a(x) := N_a(x) + \Phi(x)$$

Grundlösung, falls $\Phi \in \mathcal{C}^2(\text{cl}G)$ und $\Delta\Phi = 0$ in G ist. Dabei ist N_a das Newton Potential im \mathbb{R}^n .

Kommentar: Die Grundlösung ist also eine Singularitätenlösung wobei Φ noch frei wählbar ist. Für eine Grundlösung gilt ebenfalls die *Darstellungsformel* vom vorigen Satz:

$$\int_{\partial V} \left[u(x) \frac{\partial \gamma_a(x)}{\partial n} - \gamma_a(x) \frac{\partial u(x)}{\partial n} \right] dA + \int_V \gamma_a(x) \Delta u(x) dV = \begin{cases} u(a) & : a \in V^\circ \\ 0 & : a \in G \setminus \{V\} \end{cases}$$

für eine kompakte Menge $V \subset G$. Ebenso ist die entsprechende Bemerkung vom Satz übertragbar!

3.3.7 Satz über die Grundlösung

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$, $a \in G$, $u \in \mathcal{C}^2(G)$. Dann gilt:

$$u(a) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\|x-a\|=\varepsilon} \left[u(x) \frac{\gamma_a(x)}{\partial n} - \gamma_a(x) \frac{\partial u(x)}{\partial n} \right] dA$$

3.3.8 Definition: Harmonische Funktion

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Eine reelle Funktion $u : G \rightarrow \mathbb{R}$ heißt harmonisch in G , falls $u \in \mathcal{C}^2(G)$ und $\Delta u = 0$ in G ist.

Bemerkung: Es gibt Funktionen u , die nicht in allen Punkten von G stetig sind, obwohl $\forall x \in G : \Delta u = 0$ erfüllt ist!

3.3.9 Definition: Greensche Funktion

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein zusammenhängendes Normalgebiet im \mathbb{R}^n . So heißt $g(a, x)$ *Greensche Funktion*, falls bei fixiertem $a \in G$ die Funktion $g(a, x)$ Grundlösung in G ist, und $g(a, x) = 0$ für $x \in \partial G$ ist.

Bemerkung: Ist G ein zusammenhängendes Normalgebiet im \mathbb{R}^n , so gibt es eine eindeutige Greensche Funktion in G mit $a \in G$. Das Problem besteht jedoch darin, harmonische Funktionen Φ mit $\Phi \in \mathcal{C}^2(\text{cl}G)$ zu finden, so dass eine Grundlösung Greensche Funktion wird. Bemerke dass hier Φ allgemein auch von a abhängt: $\Phi(x) = \Phi_a(x)$

3.3.10 Satz über die Symmetrie der Greenschen Funktion

Sei $G \in \mathbb{R}^n$ ein zusammenhängendes Normalgebiet und $a \in G$. Dann ist die Greensche Funktion $g(a, x)$ symmetrisch, d.h für $x \neq a$ gilt: $g(a, x) = g(x, a)$.

Darstellungsformel der Greenschen Funktion: Die Darstellungsformel hat für eine Greensche Funktion $g(a, x)$ die Form

$$\int_{\partial G} u(x) \frac{\partial g(a, x)}{\partial n} dA + \int_G g(a, x) \Delta u(x) dV = \begin{cases} u(a) & : a \in G \\ 0 & : a \in \mathbb{R}^n \setminus \text{cl}G \end{cases}$$

3.3.11 Satz über die Lösung der Poissongleichung

Sei $G \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ ein zusammenhängendes Normalgebiet im \mathbb{R}^n und $u \in \mathcal{C}^2(\text{cl}G)$ eine Lösung der Poissongleichung $\Delta u(x) = \rho(x)$ für $x \in G$. Ist $a \in G$, so gilt

a) Für eine Grunddarstellung $\gamma_a(x)$:

$$u(a) = \int_{\partial G} \left(u(x) \frac{\partial \gamma_a(x)}{\partial n} - \gamma_a(x) \frac{\partial u(x)}{\partial n} \right) dA + \int_G \gamma_a(x) \rho(x) dV$$

b) Für eine Greensche Funktion $g(a, x)$:

$$u(a) = \int_{\partial V} u(x) \frac{\partial g(a, x)}{\partial n} dA + \int_G g(a, x) \rho(x) dV$$

da $g(a, x) = 0$ für $x \in \partial G$

c) Für eine harmonische Funktion u in G :

$$u(a) = \int_{\partial G} \frac{\partial g(a, x)}{\partial n} u(x) dA$$

3.3.12 Greensche Funktion für die Kugel

Es sei

$$B_R := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq R\}$$

und

$$G = B_R^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < R\}$$

Dann ist für $a \in B_R^\circ$ die Funktion $g(a, x)$ mit

$$n \geq 3, a \neq 0 : g(a, x) = \frac{-1}{(n-2)\omega_n} \cdot \left[\frac{1}{\|x-a\|^{n-2}} - \left(\frac{R}{\|a\|}\right)^{n-2} \cdot \frac{1}{\left\|x - \frac{R^2}{\|a\|^2} a\right\|^{n-2}} \right]$$

$$n \geq 3, a = 0 : g(a, x) = \frac{-1}{(n-2)\omega_n} \cdot \left[\frac{1}{\|x\|^{n-2}} - \frac{1}{R^{n-2}} \right]$$

$$n = 2, a \neq 0 : g(a, x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \left[\ln \|x-a\| - \ln \left(\left\| \frac{\|a\|}{R} x - \frac{R}{\|a\|} a \right\| \right) \right]$$

$$n = 2, a = 0 : g(a, x) = \frac{1}{2\pi} \cdot [\ln \|x\| - \ln R]$$

eine Greensche Funktion in B_R° .

Bemerkung: Es gilt für $\|x\| = R$:

$$\|a\| \cdot \left\| x - \frac{R^2}{\|a\|^2} a \right\| = R \|x - a\|$$

und ferner

$$\left\| \frac{\|a\|}{R} x - \frac{R}{\|a\|} a \right\| = \|x - a\|$$

Zur Konstruktion der Greenschen Funktion: Man sucht allgemein solch ein Φ so dass für $n \geq 3$ mit

$$g(a, x) = \frac{-1}{(n-2)\omega_n} \left[\frac{1}{\|x-a\|^{n-2}} - \Phi \right]$$

die Bedingungen an die Greensche Funktion erfüllt sind. Es muss also innerhalb der Kugel gelten $\Delta g(a, x) = 0$ und am Rand $g(a, \partial B_R) = 0$. Durch den Ansatz

$$\Phi(x) = \frac{1}{[\beta \|x-b\|]^{n-2}}, \quad \beta > 0, \quad \|b\| > R$$

wird für $a \neq 0$ solch ein $b \in \mathbb{R}^n$ und $\beta \in \mathbb{R}$ gesucht dass

$$g(a, \partial B_R) = 0$$

Beachte: Durch die Forderung $\|b\| > R$ ist die Bedingung $\Delta g(a, x) = 0$ in B_R^o automatisch erfüllt!
 Die Bedingung $g(a, \partial B_R) = 0$ führt auf die Gleichung $\|x - a\| = \beta \|x - b\|$ für $\|x\| = R$, also

$$\begin{aligned} \|x - a\|^2 &= \beta^2 \|x - b\|^2 \Leftrightarrow \langle x - a, x - a \rangle = \beta^2 \langle x - b, x - b \rangle \\ \Leftrightarrow \underbrace{\|x\|^2}_{R^2} - 2 \langle x, a \rangle + \|a\|^2 &= \beta^2 \left(\|x\|^2 - 2 \langle b, x \rangle + \|b\|^2 \right) \\ \Leftrightarrow R^2 + \|a\|^2 &= \beta^2 R^2 + 2 \langle a - \beta^2 b, x \rangle + \beta^2 \|b\|^2 \quad \forall \|x\| = R \\ \Rightarrow 2 \langle a - \beta^2 b, x \rangle &\stackrel{!}{=} \text{const} \quad \forall \|x\| = R \Rightarrow a - \beta^2 b = 0 \Rightarrow b = \frac{1}{\beta^2} a \\ \Rightarrow R^2 + \|a\|^2 &= \beta^2 R^2 + \frac{1}{\beta^2} \|a\|^2 \end{aligned}$$

Lösungen der letzten Gleichung sind

$$\beta_1^2 = 1$$

und

$$\beta_2^2 = \frac{\|a\|^2}{R^2}$$

Da $\|b\| > R$ ist, entfällt die erste Lösung. Somit bekommt man

$$\beta = \frac{\|a\|}{R}, \quad b = \frac{R^2}{\|a\|^2} a$$

Für $a = 0$ bzw. $n = 2$ ist analog vorzugehen.

3.3.13 Greensche Funktion für den Halbraum

Sei

$$G := \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}, \quad \partial G = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$$

Dann ist die Funktion $g(a, x)$ für $a = (a_1, \dots, a_n)$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in G$, $a \neq x$ definiert als

$$g(a, x) := \begin{cases} -\frac{1}{(n-2)\omega_n} \cdot \left[\frac{1}{\|x - a\|^{n-2}} - \frac{1}{\|x - \bar{a}\|^{n-2}} \right] & : n \geq 3 \\ \frac{1}{2\pi} \cdot [\ln \|x - a\| - \ln \|x - \bar{a}\|] & : n = 2 \end{cases}$$

mit

$$\bar{a} := (a_1, \dots, a_{n-1}, -a_n)$$

die Greensche Funktion für den Halbraum ∂G . Es gilt nämlich $g(a, x) = 0$ für $x \in \partial G$, $a \in G$ und $\Delta u = 0$ für $x \neq a$.
 Ferner gilt für $n \geq 2$

$$\text{grad } g(a, x) = \frac{1}{\omega_n} \cdot \left[\frac{(x - a)}{\|x - a\|^n} - \frac{(x - \bar{a})}{\|x - \bar{a}\|^n} \right]$$

Speziell für $x \in \partial G$

$$\text{grad } g(a, x) = \frac{1}{\omega_n} \cdot \frac{(a - \bar{a})}{\|x - a\|^n}$$

und

$$\frac{\partial g}{\partial n} = -\text{grad } g(a, x) \cdot \vec{e}_n = \frac{2a_n}{\omega_n \|x - a\|^n}$$

3.4 Eigenschaften harmonischer Funktionen

3.4.1 Definition: Mittelwerteigenschaft

Sei $G \in \mathbb{R}^n$ offen. Eine stetige Funktion $u \in \mathcal{C}(G)$ besitzt die *sphärische Mittelwerteigenschaft* $:\Leftrightarrow$

$$\forall a \in G \quad \forall B_r(a) \subset G : u(a) = \frac{1}{|\partial B_r(a)|} \cdot \int_{\partial B_r(a)} u(x) dA = \frac{1}{\omega_n} \cdot \int_{\|y\|=1} u(a + ry) dA_y$$

wobei

$$|\partial B_r(a)| = \text{vol}_{n-1}(\partial B_r(a)) = r^{n-1} \omega_n$$

der Inhalt der Oberfläche der n -dimensionalen Kugel mit Radius r ist.

Eine stetige Funktion $u \in \mathcal{C}(G)$ besitzt die *räumliche Mittelwerteigenschaft* $:\Leftrightarrow$

$$\forall a \in G \quad \forall B_r(a) \subset G : u(a) = \frac{1}{|B_r(a)|} \cdot \int_{B_r(a)} u(x) dV$$

mit

$$|B_r(a)| = \text{vol}_n(B_r(a)) = \frac{r^n}{n} \omega_n = \frac{r}{n} |\partial B_r(a)|$$

Bemerkung: Die sphärische Mittelwerteigenschaft ist äquivalent zur räumlichen Mittelwerteigenschaft!

3.4.2 Satz über harmonische Funktionen

Sei $u \in \mathcal{C}^2(G)$ in einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$ harmonisch. Dann gilt:

- u besitzt in G die Mittelwerteigenschaft.
- Maximum-Minimum Prinzip: Nimmt u in einem Punkt $a \in G$ ihr Maximum bzw. Minimum an, so ist u konstant in G .
- Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $u \in \mathcal{C}(clG)$ in G harmonisch. Dann nimmt u ihr Maximum oder Minimum auf dem Rand ∂G von G an, d.h

$$\max_{x \in clG} u(x) = \max_{x \in \partial G} u(x)$$

Bemerkung: Es zeigt sich, dass das Maximum-Minimum Prinzip sogar für stetige Funktionen $h \in \mathcal{C}(G)$ mit MWE in einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$ gilt. Wir wenden uns nochmals dem Eindeutigkeitsproblem für das Dirichletsche RWP (DRP) zu. Es gilt folgender Eindeutigkeitsatz:

3.4.3 Eindeutigkeitsatz

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $\rho \in \mathcal{C}(clG)$ und $h \in \mathcal{C}(\partial G)$. Existiert eine Lösung

$$u \in \mathcal{C}(clG) \cap \mathcal{C}^2(G)$$

des DRP:

$$\Delta u = \rho, \quad u|_{\partial G} = h$$

so ist u eindeutig bestimmt!

Beweis: Seien u_1, u_2 Lösungen des DRP. Dann ist

$$u := u_1 - u_2 \in \mathcal{C}(clG)$$

Lösung von

$$\Delta u = 0, \quad u|_{\partial G} = 0$$

Durch das Max.Min. Prinzip folgt dass das Maximum und Minimum von u in ∂G liegt. Dort ist aber $u = 0$ und somit ist auch $u(x) = 0$ in G . Demnach ist $u_1 = u_2$. \square

3.4.4 Über die Existenz und Eindeutigkeit des DRP für die Laplace Gl. auf der Kugel

Wir betrachten das DRP für die Laplace Gleichung auf der Kugel

$$B_R := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq R\}$$

Der *Poissonsche Kern*

$$\mathcal{P}_R : \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : x \neq y\} \rightarrow \mathbb{R}$$

ist für $n \geq 2$ definiert durch

$$\mathcal{P}_R(x, y) := \frac{\|y\|^2 - \|x\|^2}{R\omega_n \|y - x\|^n}$$

Es gilt

$$\Delta_x \mathcal{P}_R(x, y) = 0$$

für $x \neq y$. Mit dem Satz über die Poissongleichung 3.3.11 folgt für eine Funktion $u \in \mathcal{C}^2(B_R)$ die in B_R° harmonisch ist, die Integraldarstellung

$$u(x) = \int_{\partial B_R} \frac{\partial g(x, y)}{\partial n} u(y) dA_y$$

wobei für die Greensche Funktion auf der Kugel B_R

$$\frac{\partial g(x, y)}{\partial n} = \frac{R^2 - \|x\|^2}{R\omega_n \|x - y\|^n} = \mathcal{P}_R(x, y) \text{ für } \|x\| < R, \|y\| = R$$

gilt. Damit hat man zusammengefasst folgendes:

3.4.5 Lemma C

a) Sei $y \in \mathbb{R}^n$ fixiert. Dann gilt

$$\Delta_x \mathcal{P}_R(x, y) = 0 : x \neq y$$

b) Sei $u \in \mathcal{C}^2(B_R)$ in B_R° harmonisch. Dann gilt:

$$u(x) = \int_{\partial B_R} \mathcal{P}_R(x, y) u(y) dA_y : x \in B_R^\circ$$

Bemerkung: Insbesondere gilt:

$$1 = \int_{\partial B_R} \mathcal{P}_R(x, y) dA_y$$

(Setzen: $u(x) = 1$)

3.4.6 Satz über das DRP für die Laplace Gleichung

Sei $h \in \mathcal{C}(\partial B_R)$. Dann ist die Funktion

$$u(x) := \begin{cases} \int_{\|y\|=R} \mathcal{P}_R(x, y) h(y) dA_y & : x \in B_R^\circ \\ h(x) & : x \in \partial B_R \end{cases}$$

in B_R° harmonisch und in B_R stetig:

$$u \in \mathcal{C}^2(B_R^\circ) \cap \mathcal{C}(B_R)$$

Folgerungen aus dem vorigen Satz:

- a) Sei $u \in \mathcal{C}(B_R)$ harmonisch in B_R^o . Dann gilt $\forall x \in B_R^o$ die Poissonsche Integralformel

$$u(x) = \int_{y \in \partial B_R} \mathcal{P}_R(x, y) u(y) dA_y$$

d.h die Werte einer harmonischen Funktion im inneren der Kugel B_R kennt man wenn man die Werte von u auf dem Rand ∂B_R kennt.

- b) Eine harmonische Funktion $u \in \mathcal{C}^2(G)$ in einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$ ist beliebig oft differenzierbar.
c) Eine stetige Funktion $h \in \mathcal{C}(G)$ in einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$ ist harmonisch $\Leftrightarrow h$ besitzt die Mittelwerteigenschaft.

Weitere Folgerungen

- a) **Konvergenzsatz für harmonische Funktionen:** Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und $(u_k) \subset \mathcal{C}^2(G)$ eine Folge harmonischer Funktionen, die auf jeder kompakten Menge $A \subset G$ gleichmäßig gegen die Funktion $u : G \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert, d.h

$$\forall A \subset G : \|u - u_k\|_\infty := \sup_{x \in A} |u(x) - u_k(x)| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

Dann ist u harmonisch in G .

Bemerkung: Die Stetigkeit von u folgt hier unmittelbar aus der Tatsache dass $\mathcal{C}^2(A)$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ ein vollständig normierter Raum ist.

- b) **Harnachsche Ungleichung:** Sei $n \geq 2$, $R > 0$ und $u \in \mathcal{C}^2(B_R^o) \cap \mathcal{C}(B_R)$ eine nicht negative harmonische Funktion in B_R^o . Dann gilt für $x \in B_R^o$:

$$R^{n-2} \cdot \frac{R - \|x\|}{(R + \|x\|)^{n-1}} \cdot u(0) \leq u(x) \leq R^{n-2} \cdot \frac{R + \|x\|}{(R - \|x\|)^{n-1}} \cdot u(0)$$

- c) **Satz von Liouville:** Eine beschränkte harmonische Funktion $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ auf ganz \mathbb{R}^n ist konstant.
d) **Stabilität von Lösungen:** Sei G ein beschränktes Gebiet im \mathbb{R}^n . Sind φ_1, φ_2 stetige Funktionen auf ∂G und u_1, u_2 die zugehörigen Lösungen des DRP

$$\Delta u = f(x) : x \in G, f \in \mathcal{C}(G) \wedge u|_{\partial G} = \varphi$$

dann ist

$$\max_{x \in \partial G} |u_1(x) - u_2(x)| \leq \max_{x \in \partial G} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|$$

Kleine Änderungen der Randwerte bewirken auch kleine Änderungen der Lösungen. Man sagt: Das Problem sei *korrekt gestellt*.

Bemerkung: Ist G kein beschränktes Gebiet im \mathbb{R}^n , so ist das AWP für die Laplace Gleichung im allgemeinen nicht korrekt gestellt!

Beispiel: Das AWP für die 2-Dimensionale Laplace Gleichung $\Delta u = 0$ in $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ mit $u|_{\partial G} = \varphi$ und $u_y = \psi$ auf $\mathbb{R} \times \{0\}$ ist ein nicht korrekt gestelltes Problem!

Abschließend einige Bemerkungen zum DRP für die Poissongleichung $\Delta u = \rho$ für Funktionen ρ mit *Kompaktem Träger*, d.h

$$\text{supp } \rho := \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x) \neq 0\}$$

ist kompakt im \mathbb{R}^n .

3.4.7 Satz zur Poissongleichung

Sei $n \geq 3$ und $\rho \in C^2(\mathbb{R}^n)$ eine Funktion mit kompaktem Träger. Ist

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} N_x(y) \rho(y) dV, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

so ist $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ und erfüllt die Poissongleichung $\Delta u = \rho$ für $x \in \mathbb{R}^n$. Hierbei ist $N_x(y)$ das Newton Potential.

- **Bemerkung:** Es gilt für ρ die Integralidentität

$$\rho(x) = \int_{\mathbb{R}^n} N_x(y) \Delta \rho(y) dV_y$$

denn man kann ein genügend großes $R > 0$ finden so dass $B_R(x) \supset \text{supp } \rho$ ist, und man mit der Darstellungsformel bekommt

$$\rho(x) = \int_{\partial B_R(x)} \underbrace{\left(\rho(y) \frac{\partial N_x(y)}{\partial n} - N_x(y) \frac{\partial \rho(y)}{\partial n} \right)}_0 dA + \int_{B_R(x)} N_x(y) \Delta \rho(y) dV_y = \int_{\mathbb{R}^n} N_x(y) \Delta \rho(y) dV_y$$

Mit Hilfe von diesem Satz, können wir das folgende DRP für die Poissongleichung lösen:

3.4.8 Satz über die Eindeutigkeit der Poissongleichung

Sei $n \geq 3$ und $B_R^o = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < R\}$. Ist φ auf ∂B_R^o stetig und $\rho \in C^2(\mathbb{R}^n)$ mit kompaktem Träger, so besitzt das DRP für die Poissongleichung $\Delta u = \rho$, $u|_{\partial B_R} = \varphi$ genau eine Lösung. Es gilt $u = v + w$ wobei

$$v(x) = \frac{R^2 - \|x\|^2}{R\omega_n} \cdot \int_{\partial B_R} \frac{\varphi(y) - w(y)}{\|y - x\|^n} dA_y$$

$$w(x) = \int_{\mathbb{R}^n} N_x(y) \rho(y) dV_y$$

Beweis: Wir machen den Ansatz $u = v + w$ mit

$$w(x) = \int_{\mathbb{R}^n} N_x(y) \rho(y) dV_y$$

Weil u das DRP in B_R^o mit

$$u|_{\partial B_R} = v|_{\partial B_R} + w|_{\partial B_R} = \varphi$$

löst, ergibt sich für v folgendes DRP

$$\Delta v = \underbrace{\Delta u}_\rho - \underbrace{\Delta w}_\rho = 0, \quad v|_{\partial B_R} = \varphi - w|_{\partial B_R}$$

Nach Satz 3.4.6 besitzt dieses Problem die Lösung

$$v(x) = \int_{\partial B_R} \mathcal{P}_R(x, y) (\varphi(y) - w(y)) dA_y \quad \square$$

3.5 Die Wellengleichung

Ist $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ und $t \in \mathbb{R}$, so setzen wir

$$(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

$$\mathbb{R}_+^{n+1} := \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : t > 0\}$$

$$cl\mathbb{R}_+^{n+1} := \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : t \geq 0\}$$

Wir betrachten das folgende *Anfangswertproblem* oder *Cauchyproblem*.

Sei

$$\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n), \psi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n), f(x, t) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+^{n+1})$$

Gesucht ist eine Funktion $u = u(x, t) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^{n+1})$ mit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta_x u(x, t) = f(x, t), \quad u(x, 0) = \varphi(x) : x \in \mathbb{R}^n$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \in \mathcal{C}(cl\mathbb{R}_+^{n+1}), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x)$$

Wir setzen o.B.d.A $c = 1$, denn ist u eine Lösung des Cauchyproblems

$$(1) : u_{tt} - c^2 \Delta u = 0, \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x)$$

dann ist $v(x, \tau) := u(x, t)$ mit $\tau = ct$ eine Lösung des Cauchyproblems

$$(2) : v_{\tau\tau} - \Delta v = \tilde{f}(x, \tau) := \frac{1}{c^2} f\left(x, \frac{\tau}{c}\right), \quad v(x, 0) = \varphi(x), \quad v_\tau(x, 0) = \tilde{\psi}(x) := \frac{1}{c} \psi(x)$$

Umgekehrt: Ist $v(x, \tau)$ Lösung von (2), so ist $u(x, t) = v(x, \tau)$ mit $\tau = ct$ Lösung von (1).

Beweis:

$$u_{tt} = c^2 v_{\tau\tau}, \quad \Delta u = \Delta v \Rightarrow u_{tt} - c^2 \Delta u = c^2 (v_{\tau\tau} - \Delta v) = f\left(x, \frac{\tau}{c}\right) \Leftrightarrow v_{\tau\tau} - \Delta v = \frac{1}{c^2} f\left(x, \frac{\tau}{c}\right) \quad \square$$

Anfangsbedingungen:

$$v(x, 0) = u(x, 0) = \varphi(x)$$

$$cv_\tau(x, 0) = u_t(x, 0) = \psi(x) \Rightarrow v(x, 0) = \frac{1}{c} \psi(x) =: \tilde{\psi}(x)$$

3.5.1 Satz über die Eindeutigkeit der Lösung des Cauchyproblems

Das Cauchyproblem der Wellengleichung besitzt höchstens eine Lösung (in der Klasse der hinreichend glatten Funktionen), z.B

$$\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n), \psi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$$

Bemerkung: Im Fall $n = 1$ lässt sich die Eindeutigkeit leicht beweisen:

$$u(x, t) = f(x + t) + g(x - t), \quad f, g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$$

3.5.2 Konstruktion von Lösungen des Cauchyproblems für die WG

Wir beginnen mit dem Cauchyproblem

$$u_{tt} - \Delta u = f(x, t), \quad u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^{n+1}), \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x)$$

Es gibt verschiedene Methoden zur Konstruktion von Lösungen des Cauchyproblems für die WG. Um eine Struktur der Lösung zu bekommen, wenden wir hier die so genannte *Operatormethode* in formaler Weise an. Wir betrachten den Fall $n = 1$:

$$u_{tt} - u_{xx} = f(x, t)$$

und setzen:

$$A := \frac{\partial}{\partial x}, \quad A^k := \frac{\partial^k}{\partial x^k}$$

Somit lautet die Wellengleichung

$$u_{tt} - A^2 u = f(x, t)$$

Setzen wir ferner

$$v(t) := v(\cdot, t), f_o(t) := f(\cdot, t), v(0) = \varphi_o = \varphi(\cdot), v_t(0) = \psi_o = \psi(\cdot)$$

dann erhält man formal ein Anfangswertproblem für eine *gewöhnliche DGL*

$$\ddot{v} - A^2 v = f_o, v(0) = \varphi_o, v_t(0) = \psi_o$$

Betrachten wir $A > 0$ als positive reelle Zahl und φ_o, ψ_o als reelle Zahlen, so ist die Lösung des AWP

$$v(t) = \cosh(tA)\varphi_o + \sinh(tA)A^{-1}\psi_o + \int_0^t \sinh((t-s)A)A^{-1}f_o(s) ds$$

Setzen wir ferner

$$S(t) := \sinh(tA)A^{-1}$$

so hat v die Darstellung

$$(1) \quad v(t) = S'(t)\varphi_o + S(t)\psi_o + \int_0^t S(t-s)f_o(s) ds$$

Wir interpretieren nun die Struktur (1) für das Cauchyproblem der Wellengleichung. Dazu müssen wir $S(t)$ als Operator mit $A = \frac{\partial}{\partial x}$ interpretieren. Die Intuition sagt uns, dass der inverse Operator

$$A^{-1} =: \int_0^x$$

der Integraloperator ist. Denn es gilt:

$$(AA^{-1}h)(x) = A \int_0^x h(y) dy = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^x h(y) dy = h(x) \rightarrow AA^{-1} = I$$

Achtung: Es gilt jedoch

$$(A^{-1}A)h = A^{-1} \frac{\partial}{\partial x} h(x) = \int_0^x \frac{\partial}{\partial y} h(y) dy = h(y) \Big|_0^x = h(x) - h(0)$$

Der Integraloperator \int_0^x ist also nur *Rechtsinvers* zu A .

Wir definieren nun:

$$e^{tA} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} t^k$$

d.h

$$(e^{tA}h)(x) := h(x+t)$$

also eine Verschiebung des Arguments um t . Die Motivation für diese Definition erhält man für beliebig oft differenzierbare Funktionen die einer Taylorreihenentwicklung genügen, durch

$$(e^{tA}h)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^{(k)}(x)}{k!} t^k = h(x+t)$$

Somit erhalten wir

$$(\cosh(tA)\varphi)x = \frac{1}{2}(\varphi(x+t) + \varphi(x-t))$$

$$\sinh(tA)A^{-1}\psi(x) = \sinh(tA) \left(\int_0^x \psi(y) dy \right) = \frac{1}{2} (e^{tA} - e^{-tA}) \int_0^x \psi(y) dy$$

$$= \frac{1}{2} \left(\int_0^{x+t} \psi(y) dy - \int_0^{x-t} \psi(y) dy \right) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \psi(y) dy$$

und ferner

$$\int_0^t \sinh((t-s)A)A^{-1}f_o(s) ds = \frac{1}{2} \int_0^t \left\{ \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} f(y, s) dy \right\} ds$$

Der Verdacht auf die Struktur der Lösung erweist sich für $n \geq 1$ in der Form

$$(2) \quad u(x, t) = (S'(t)\varphi)(x) + (S(t)\psi)(x) + \int_0^t S(t-s)f(x, s) ds$$

$$= \frac{1}{2} (\varphi(x+t) + \varphi(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \psi(y) dy + \frac{1}{2} \int_0^t \left\{ \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} f(y, s) dy \right\} ds$$

3.5.3 Satz über die Lösung des 1-dimensionalen Cauchyproblems

Seien

$$f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times [0, \infty]), \quad \varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}), \quad \psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$$

Dann ist (2) die eindeutig bestimmte Lösung des Cauchyproblems

$$u_{tt} - u_{xx} = f(x, t), \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x)$$

3.5.4 Die 2 und 3-dimensionale Wellengleichung

Die Motivation zur Konstruktion einer Lösung für das Cauchyproblem der 3-dimensionalen Wellengleichung

$$u_{tt} - \Delta u = f(x, t), \quad t > 0, \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^3$$

holen wir uns über die Struktur der Lösung des Cauchyproblems der 1-dimensionalen Wellengleichung.

$$u(x, t) = (S'(t)\varphi)(x) + (S(t)\psi)(x) + \int_0^t S(t-s)f(x, s) ds$$

$$= \frac{1}{2} (\varphi(x+t) + \varphi(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \psi(y) dy + \frac{1}{2} \int_0^t \left\{ \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} f(y, s) dy \right\} ds$$

Wir betrachten

$$(S(t)\psi)(x) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \psi(y) dy = \frac{t}{|[t-x, t+x]|} \cdot \int_{[x-t, x+t]} \psi(y) dy$$

Oberes kann mit folgender Mittelung

$$(M\psi)(x, t) := \frac{1}{|[x-t, x+t]|} \cdot \int_{[x-t, x+t]} \psi(y) dy$$

in der Form

$$(S(t)\psi)(x) = t(M\psi)(x, t)$$

geschrieben werden. Für eine Funktion $h \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ sei jetzt

$$M(h)(x, t) := \frac{1}{|\partial B_t(x)|} \cdot \int_{\partial B_t(x)} h(y) dA_y$$

die *sphärische Mittelung*. Für eine Lösung des 3-dimensionalen Cauchyproblems der WG haben wir folgenden Satz.

3.5.5 Satz über das retardierte Potential in der Wellengleichung

Seien

$$\varphi \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^3), \psi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3), f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$$

Dann ist mit dem *retardierten Potential*

$$(Rf)(x, t) := \frac{1}{4\pi} \int_{\|y-x\| \leq t} \frac{f(y, t - \|y-x\|)}{\|y-x\|} dy$$

die Funktion

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} (t(M\varphi)(x, t)) + t(M\psi)(x, t) + (Rf)(x, t) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi t} \cdot \int_{\|y-x\|=t} \varphi(y) dA_y \right) + \frac{1}{4\pi t} \cdot \int_{\|y-x\|=t} \psi(y) dy + (Rf)(x, t) \end{aligned}$$

Lösung des Cauchyproblems

$$u_{tt} - \Delta u = f(x, t), \quad t > 0, \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^3$$

3.5.6 Lemma über das retardierte Potential

Es gelten folgende Beziehungen:

a)

$$(Mh)(x, t) = \frac{1}{\omega_n} \cdot \int_{\|z\|=1} h(x + tz) dA_z, \quad h \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$$

b)

$$\frac{\partial}{\partial t} (Mh)(x, t) = \frac{1}{|\partial B_t(x)|} \cdot \int_{\partial B_t(x)} \text{grad } h(y) \cdot d\vec{A}_y = \frac{1}{|\partial B_t(x)|} \cdot \int_{B_t(x)} (\Delta h)(y) dy$$

c)

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (Mh)(x, t) = -\frac{(n-1)}{n} \cdot \frac{1}{|B_t(x)|} \cdot \int_{B_t(x)} (\Delta h)(y) dy + \frac{1}{|\partial B_t(x)|} \cdot \int_{\partial B_t(x)} (\Delta h)(y) dA_y$$

Aus der Lösungsformel für das 3-dimensionale Cauchyproblem erhalten wir mit der *Hadamardschen Abstiegsmethode* die Lösungsformel für das 2-dimensionale Cauchyproblem.

3.5.7 Satz über die 2-dimensionale Wellengleichung

Seien $\varphi \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^2)$, $\psi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ und $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2 \times [0, \infty))$. Dann ist:

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{B_t(x)} \frac{\varphi(y)}{\sqrt{t^2 - \|y-x\|^2}} dV_y \right) + \frac{1}{2\pi} \int_{B_t(x)} \frac{\psi(y)}{\sqrt{t^2 - \|y-x\|^2}} dV_y + \int_0^t \frac{1}{2\pi} \int_{B_{t-s}(x)} \frac{f(y, s)}{\sqrt{(t-s)^2 - \|y-x\|^2}} dV_y ds$$

Lösung des Cauchyproblems

$$u_{tt} - \Delta u = f(x, t), \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x)$$

wobei

$$B_t(x) := \{y \in \mathbb{R}^2 : \|y-x\| \leq t\}$$

3.6 Cauchyproblem der Wärmeleitungsgleichung

Ist $f \in \mathcal{C}(\text{cl } \mathbb{R}_+^{n+1})$, $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$, so wird eine Funktion $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^{n+1}) \cap \mathcal{C}(\text{cl } \mathbb{R}_+^{n+1})$ gesucht, mit

$$u_t - \Delta u = f(x, t)$$

und

$$u(x, 0) = g(x) : x \in \mathbb{R}^n$$

Die Funktion

$$\Phi : \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}$$

definiert als

$$\Phi(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \cdot e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} & : x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ 0 & : x \in \mathbb{R}^n, t < 0 \end{cases}$$

löst die homogene Wärmeleitungsgleichung (oder Diffusionsgleichung)

$$u_t - \Delta u = 0$$

mit der Normierung

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x, t) dx = 1 : t > 0$$

und heißt *Fundamentallösung der WL*.

Bemerkungen:

- a) Für die Fundamentallösung gilt

$$\lim_{t \rightarrow 0} \Phi(x, t) = \begin{cases} \infty & : x = 0 \\ 0 & : x \neq 0 \end{cases} .$$

Die Fundamentallösung für die WL spielt die gleiche Rolle wie das Newtonpotential für die Wellengleichung. Sie beschreibt die Wärmeverteilung im n -dimensionalen Raum für $t \geq 0$ bei Anfangs δ -distributionsartiger Wärmeverteilung im Ursprung (siehe auch nächsten Satz).

- b) Die homogene Diffusionsgleichung mit Diffusionskoeffizienten κ

$$u_t - \kappa \cdot \Delta u = 0$$

besitzt die Fundamentallösung

$$\Phi_\kappa(x, t) := \begin{cases} \frac{1}{(4\pi\kappa t)^{n/2}} \cdot e^{-\frac{\|x\|^2}{4\kappa t}} & : x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ 0 & : x \in \mathbb{R}^n, t < 0 \end{cases}$$

mit ähnlichen Normierungsbedingungen und Grenzwerten.

3.6.1 Satz über die Fundamentallösung der WL

Sei $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ beschränkt. Dann erfüllt die Funktion

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) g(y) dy : x \in \mathbb{R}^n, t > 0$$

die folgenden Eigenschaften:

- $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ ist beschränkt.
- $u_t - \Delta u = 0$ auf $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$
- $\lim_{(x,t) \rightarrow (x_0,0)} u(x, t) = g(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$
- $u = u(x, t)$ ist eine Lösung des Cauchyproblems

$$u_t - \Delta u = 0 : t > 0, u(x, 0) = g(x) : x \in \mathbb{R}^n$$

Bemerkung: In der Definition von u ist zu sehen, dass instantan alle Punkte $y \in \mathbb{R}^n$ eine Auswirkung auf alle anderen Punkte $x \in \mathbb{R}^n$ haben. Die Information wird sozusagen mit unendlicher Geschwindigkeit *übertragen*.

4 Fouriermethode zur Lösung von partiellen Differentialgleichungen

4.1 Einführung

4.1.1 Beispiel: Wärmeleitung in einem Kreiszyylinder

Betrachten die Temperaturverteilung in einem unendlich ausgedehnten Kreiszyylinder mit dem Radius l bei vorgegebener Temperaturverteilung $f(x)$ auf der Oberfläche.



Zur Vereinfachung betrachten wir nur den stationären Fall, und eine von z -unabhängige Temperaturverteilung

$$f(x) \cong f(\varphi)$$

So erhält man durch die Wärmeleitungsgleichung die Laplace-Gleichung

$$\Delta u = 0, \quad u|_{\partial B_l} = f(x)$$

Hinsichtlich der Tatsache dass auch die Lösung unabhängig von der z -Koordinate sein wird, und eine gewisse Zylindersymmetrie aufweisen wird, verwenden wir Polarkoordinaten (r, φ) und schreiben

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \quad u(l, \varphi) = f(\varphi) : 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

Im folgenden werden wir o.B.d.A $l = 1$ setzen, da sich der allgemeinere Fall einfach durch Koordinatentransformation ergibt. Wir machen den Separationsansatz

$$u(r, \varphi) = R(r) \cdot \Phi(\varphi)$$

und bekommen

$$\Delta u = R'' \cdot \Phi + \frac{R'}{r} \cdot \Phi + \frac{R}{r^2} \cdot \Phi'' = 0 \rightarrow -\frac{R'' + \frac{1}{r}R'}{\frac{1}{r^2}R} = \frac{\Phi''}{\Phi}$$

Da linke und rechte Seite des Ausdruckes von jeweils unterschiedlichen Variablen abhängen und überall gleich sind, müssen sie beide konstant sein:

$$-\frac{R'' + \frac{1}{r}R'}{\frac{1}{r^2}R} = \frac{\Phi''}{\Phi} =: -\mu : const$$

Somit erhält man die gewöhnlichen DGL

$$r^2 R'' + rR' - \mu R = 0, \quad \Phi'' + \mu\Phi = 0$$

mit den Forderungen

$$\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi), \quad R : \text{stetig}$$

Ist $f(\varphi) = C : const$ so ergibt sich die eindeutige Lösung als $u(r, \varphi) = C$. Wir betrachten also den Fall wo f nicht konstant ist, also irgendwo $f'(\varphi) \neq 0$ ist. Somit ist auch $\Phi' \neq 0$ und ferner

$$\Phi(0) = \Phi(2\pi) \wedge \Phi'(0) = \Phi'(2\pi)$$

Wegen $\mu\Phi = -\Phi''$ bekommt man

$$\mu \underbrace{\int_0^{2\pi} \Phi^2(\varphi) d\varphi}_{>0} = - \int_0^{2\pi} \Phi'' \Phi d\varphi = - \underbrace{\Phi' \Phi \Big|_0^{2\pi}}_0 + \int_0^{2\pi} \Phi'^2 d\varphi > 0$$

und sieht dass $\mu > 0$ sein muss. Wir setzen also $\mu = \lambda^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$ und bekommen die Lösung

$$\Phi(\varphi) = C_1 \cos(\lambda\varphi) + C_2 \sin(\lambda\varphi), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Durch die Randbedingungen

$$\Phi(0) = \Phi(2\pi) \wedge \Phi'(0) = \Phi'(2\pi)$$

ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$[\cos(2\pi\lambda) - 1] C_1 + \sin(2\pi\lambda) C_2 = 0$$

$$-\sin(2\pi\lambda) C_1 + [\cos(2\pi\lambda) - 1] C_2 = 0$$

das nur nicht-triviale Lösung hat falls

$$\det \begin{pmatrix} [\cos(2\pi\lambda) - 1] & \sin(2\pi\lambda) \\ -\sin(2\pi\lambda) & [\cos(2\pi\lambda) - 1] \end{pmatrix} = 2[1 - \cos(2\pi\lambda)] = 0$$

ist, also

$$\lambda = \pm n, \quad n \in \mathbb{N}$$

Es genügt, nur die Werte $\lambda_n = n \in \mathbb{N}$ zu betrachten, da negative Werte nichts an der ursprünglichen Lösung ändern. Wir erhalten somit folgende Lösungen:

$$\Phi_n(\varphi) = c_n \cdot \cos(n\varphi) + d_n \cdot \sin(n\varphi) : n \in \mathbb{N}$$

Damit folgt jetzt für $R = R(r)$ folgende (Eulersche) DGL

$$r^2 R'' + rR' - n^2 R = 0$$

deren Lösungen sich ergeben als

$$R(r) = R_n(r) = e_n r^n + p_n r^{-n}$$

Da wir die Stetigkeit bzw. die Definierbarkeit in $r = 0$ fordern, setzen wir $p_n = 0$, und erhalten die partikulären Lösungen von $\Delta u = 0$ gemäß

$$u_n(r, \varphi) = r^n \cdot [a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)], \quad a_n, b_n \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Bemerkungen:

- Jede endliche Linearkombination der u_n ist Lösung von $\Delta u = 0$.
- Wählt man die Zahlenfolgen $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$ beschränkt, so ist

$$u(r, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cdot [a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)]$$

für $0 \leq r < 1$ und $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ beliebig oft nach r und φ gliedweise differenzierbar (Majorantenkriterium), und es gilt:

$$\Delta u = \Delta \left(\frac{a_0}{2} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \Delta u_n = 0$$

Zur erfüllen wäre jedoch die Randbedingung $u(1, \varphi) = f(\varphi)$, wobei wir voraussetzen dass f stetig auf $[0, 2\pi)$ ist mit

$$\lim_{\varphi \rightarrow 2\pi^-} f(\varphi) = f(0)$$

Damit lässt sich f zu einer stetigen 2π -periodischen Funktion auf \mathbb{R} fortsetzen. Es ergibt sich folgendes Problem: Kann man die Koeffizienten a_0, a_n, b_n so wählen, dass

$$u(1, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)) = f(\varphi)$$

gilt?

Annahme: Die Reihe konvergiert gleichmäßig in φ . Dann erhält man durch Multiplikation obiger Gleichung mit $\cos(k\varphi)$ bzw. $\sin(k\varphi)$, $k \in \mathbb{N}_0$ und gliedweise Integration

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) d\varphi = a_0\pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \cdot \cos(k\varphi) d\varphi = a_k\pi \quad : k = 1, 2, \dots$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \cdot \sin(k\varphi) d\varphi = b_k\pi \quad : k = 1, 2, \dots$$

$$\text{Oder: } a_k = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \cdot \cos(k\varphi) d\varphi$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \cdot \sin(k\varphi) d\varphi$$

Dabei wurden folgende Orthogonalitätsrelationen verwendet:

$$\langle \cos k\varphi, \cos n\varphi \rangle = 0 \quad : k \neq n$$

$$\langle \sin k\varphi, \cos n\varphi \rangle = 0 \quad \forall k, n$$

$$\langle \sin k\varphi, \sin n\varphi \rangle = 0 \quad : k \neq n$$

$$\langle \sin n\varphi, \sin n\varphi \rangle = \langle \cos n\varphi, \cos n\varphi \rangle = \pi$$

mit

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \cdot g(\varphi) d\varphi$$

Einsetzen in die Reihe für $u(r, \varphi)$ ergibt

$$\begin{aligned} u(r, \varphi) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cdot \left[\frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt \cdot \cos(n\varphi) + \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt \cdot \sin(n\varphi) \right] \\ &\stackrel{!}{=} \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cdot [\cos(nt) \cos(n\varphi) + \sin(nt) \sin(n\varphi)] \right\} dt \\ &\cong \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos[n(t - \varphi)] \right] dt \end{aligned}$$

wobei "!" die Forderung impliziert, dass eine Vertauschung von Summation und Integration möglich ist. Es gilt

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(n\alpha) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos \alpha}$$

was man mit $z := re^{i\alpha}$ leicht sehen kann:

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{1}{2} + \frac{z}{1 - z} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + z}{1 - z}$$

Durch Vergleich von Real- und Imaginärteil folgt so die obere Behauptung. Somit ist

$$u(r, \varphi) = \frac{1 - r^2}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t)}{1 + r^2 - 2r \cos(t - \varphi)} dt$$

Dabei gilt

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} u(r, \varphi) = f(\varphi)$$

(siehe dazu Beweis zu 3.4.6 in Kapitel II). Transformation der Lösung auf das Kreisproblem in kartesische Koordinaten ergibt mit

$$v(x) = v(x_1, x_2) = v(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = u(r, \varphi)$$

$$g(y) := g(\cos \varphi, \sin \varphi) = f(\varphi)$$

schließlich

$$v(x) = \frac{1 - \|x\|^2}{\omega_2} \cdot \int_{B_1} \frac{g(y)}{\|y - x\|^2} dA_y$$

(Vgl. mit Satz 3.4.6 über das DRP der Laplace Gleichung für die 2-dimensionale Kugel (Kreis)).

Bemerkungen: Gerade und ungerade Fortsetzung: Eine Funktion $f : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ lässt sich auf \mathbb{R} derart fortsetzen, dass sich eine gerade bzw. ungerade, stetige, 2π -periodische Fortsetzung ergibt. Sei f_g die gerade Fortsetzung. So ist

$$f_g(x) := \begin{cases} f(x) & : 0 < x < \pi \\ f(-x) & : -\pi < x < 0 \end{cases}$$

Bei gerader Fortsetzungen unterliegen die Werte $f_g(0)$ und $f_g(\pi) = f_g(-\pi)$ keiner Einschränkung, falls sie nicht vornherein gegeben sind! Dagegen führt die ungerade 2π -periodische Fortsetzung

$$f_u(x) := \begin{cases} f(x) & : 0 < x < \pi \\ -(f - x) & : -\pi < x < 0 \end{cases}$$

auf die Notwendigkeit

$$f(0) = 0 \wedge f(\pi) = 0$$

Andere Periodenlängen: Hat die Funktion f die Periode 2π auf \mathbb{R} , so hat die Funktion

$$g(x) := f\left(\frac{\pi x}{l}\right), \quad l > 0$$

die Periode $2l$. Denn

$$g(x \pm 2l) = f\left(\frac{\pi x}{l} \pm 2\pi\right) = f\left(\frac{\pi x}{l}\right) = g(x)$$

4.2 Elemente der Hilbertraumtheorie

4.2.1 Definition: Prähilbertraum

Ein linearer Raum (Vektorraum) H über \mathbb{K} (\mathbb{R} oder \mathbb{C}) heißt *Prähilbertraum*, falls er ausgestattet ist mit einem *Skalarprodukt*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{K}$$

das folgenden Axiomen genügt:

- Positiv definit:** $\forall x \in H : \langle x, x \rangle \geq 0$ und $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
Bemerkung: $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}$
- Antisymmetrie:** $\forall x, y \in H : \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
- Homogen im 1. Argument:** $\forall a \in \mathbb{K} : \forall x, y \in H : \langle ax, y \rangle = a \langle x, y \rangle$
- Distributivität:** $\forall x, y, z \in H : \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

Weitere Eigenschaften des Skalarproduktes: Aus den oberen Axiomen folgen außerdem:

- a) $\forall a \in \mathbb{K} : \forall x, y \in H : \langle x, ay \rangle = \bar{a} \langle x, y \rangle$
- b) $\forall a, b \in \mathbb{K} : \forall x, y, z \in H : \langle ax + by, z \rangle = a \langle x, z \rangle + b \langle y, z \rangle \wedge \langle z, ax + by \rangle = \bar{a} \langle z, x \rangle + \bar{b} \langle z, y \rangle$
- c) $x = 0$ oder $y = 0 \Rightarrow \langle x, y \rangle = 0$
- d) **Cauchy Schwarzsche Ungleichung:**

$$\forall x, y \in H : \left| \langle x, y \rangle \right|^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$$

- e) Durch $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ wird auf H eine Norm definiert, und aus der Cauchy-Schwarzchen Ungleichung folgt

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

- f) $\langle x, y \rangle$ ist stetig in x und y , d.h

$$x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y \Rightarrow \langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$$

- g) **Parallelogrammgleichung:**

$$\forall x, y \in H : \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2 \left(\|x\|^2 + \|y\|^2 \right)$$

4.2.2 Definition: Orthogonalität

Zwei Elemente $x, y \in H$ heißen *orthogonal* $:\Leftrightarrow$

$$\langle x, y \rangle = 0$$

Man schreibt:

$$x \perp y$$

Es gelten folgende Aussagen:

- a) $\forall x \in H : x \perp 0$
- b) $x \perp x \Leftrightarrow x = 0$
- c) Sind $y_n \perp x \forall n \in \mathbb{N}$ so gilt: $y_n \rightarrow y \Rightarrow y \perp x$

4.2.3 Satz des Pythagoras

Seien $x_1, \dots, x_n \in H$ mit $x_i \perp x_k : i \neq k$, so gilt

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2$$

4.2.4 Definition: Hilbertraum

Ein Prähilbertraum $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ der bzgl. $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ vollständig ist, heißt *Hilbertraum*. Kurz: Ein vollständiger Prähilbertraum ist eine Hilbertraum.

Beispiele:

- Der Folgenraum l_2

$$l_2 := \left\{ x = (\xi_1, \xi_2, \dots) : \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2 < \infty \right\}$$

$$x = (\xi_i), \quad y = (\eta_i)$$

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \overline{\eta_i}$$

ist ein Prähilbertraum. Durch

$$\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

wird l_2 zu einem Hilbertraum.

- Der Raum $\mathcal{C}[a, b]$ aller stetigen Funktionen auf $[a, b]$, mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x) \overline{g(x)} \, dx$$

und der so induzierten Norm

$$\|f\|_2 := \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 \, dx}$$

ist ein Prähilbertraum. Die Vervollständigung von $\mathcal{C}[a, b]$ in den $\|\cdot\|_2$ ist ein Hilbertraum (Elemente sind Funktionenklassen). Die Vervollständigung von $\mathcal{C}[a, b]$ in der Norm

$$\|f\|_2 := \left(\int_a^b |f(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

ist der Raum $L_2[a, b]$ aller Lebesgue-Integrierbaren Funktionen.

4.2.5 Definition: Separabler Hilbertraum

Ein Hilbertraum heißt *separabel* $:\Leftrightarrow$ Es existiert ein abzählbares System

$$\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset H$$

so dass

$$\forall x \in H : \forall \varepsilon > 0 : \exists g_{n(x, \varepsilon)} : \|x - g_{n(x, \varepsilon)}\| \leq \varepsilon$$

4.2.6 Definition: Orthogonalsystem

Ein System

$$\{g_k\}_{k \in I} \subset H \quad , \quad I : \text{Indexmenge}$$

heißt *Orthogonalsystem* $:\Leftrightarrow$

$$\forall k, l \in \mathbb{N}, \quad k \neq l : g_k \perp g_l$$

Bemerkung: Für Mengen I, X heißt eine Abbildung $g : I \rightarrow X$ *Familie*, *System* oder *verallgemeinerte Folge*. Die Menge I heißt in diesem Kontext *Indexmenge*. Man schreibt:

$$\{g_a\}_{a \in I}, \quad (g_a)_{a \in I}, \quad (g(a))_{a \in I}$$

4.2.7 Definition: Orthonormalsystem

Ein Orthogonalsystem $S = \{g_k\}_{k \in I}$ heißt ferner ein *Orthonormalsystem* $:\Leftrightarrow$

$$\forall g_i \in S : \|g_i\| = \sqrt{\langle g_i, g_i \rangle} = 1$$

4.2.8 Satz über Orthogonalsysteme

- In einem Hilbertraum H sind die Elemente eines Orthogonalsystems $\{g_k\}_{k \in I}$ stets linear unabhängig.
- In einem separablen Hilbertraum ist jedes Orthogonalsystem endlich oder abzählbar.

4.2.9 Definition: Reihe

- Sei $(x_n) \subset H$ eine Folge. Dann heißt die Folge der Partialsummen

$$(S_n) := \left(\sum_{k=1}^n x_k \right)$$

Reihe. Schreibweise:

$$\sum_{k=1}^n x_k := (S_n)$$

- Eine Reihe $\sum_{k=1}^n x_n$ heißt *konvergent* gegen $x \in H$ $:\Leftrightarrow$

$$\left\| x - \sum_{k=1}^n x_k \right\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

- Eine Reihe $\sum_{k=1}^n x_n$ heißt *absolut konvergent* $:\Leftrightarrow$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x\| < \infty$$

4.2.10 Definition: Orthogonalreihe

Sei $\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ein Orthogonalsystem in einem unendlich dimensionalen Hilbertraum H . Dann heißt die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k g_k, \quad C_k \in \mathbb{K}$$

Orthogonalreihe.

4.2.11 Satz über Orthogonalreihen

Sei $\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ein Orthogonalsystem in H , mit $\dim H = \infty$. Dann gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k g_k \text{ konvergent in } H \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |C_k|^2 \|g_k\|^2 < \infty$$

4.2.12 Lemma

Sei $\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem in H . Dann gilt:

$$\left\| x - \sum_{k=1}^n \lambda_k g_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |\langle x, g_k \rangle|^2 + \sum_{k=1}^n |\lambda_k - \langle x, g_k \rangle|^2$$

4.2.13 Besselsche Ungleichung & beste Approximation

Sei $\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem und $\dim H = \infty$. Dann gilt:

a) **Besselsche Ungleichung:**

$$\sum_{k=1}^n |\langle x, g_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad \forall x \in H, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

bzw.

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, g_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad \forall x \in H$$

b) **Beste Approximation:**

$$\left\| x - \sum_{k=1}^n \langle x, g_k \rangle g_k \right\| = \min_{\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}} \left\| x - \sum_{k=1}^n \lambda_k g_k \right\|$$

Die beste Approximation von x durch Linearkombination der Form $\sum_{k=1}^n \lambda_k g_k$ wird durch $\lambda_k = \langle x, g_k \rangle$ erreicht.

Beide Aussagen folgen direkt aus dem vorigen Lemma.

4.2.14 Definition: Fourierreihe

Sei $\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset H$ ein Orthonormalsystem in einem separablen ∞ -dimensionalen Hilbertraum. Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, g_k \rangle g_k$$

heißt *Fourierreihe* von x bzgl. des Orthonormalsystems $\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Die $\langle x, g_k \rangle$ heißen *Fourierkoeffizienten* von x bzgl. des Orthonormalsystems $\{g_k\}$.

Bemerkung: Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, g_k \rangle g_k$ ist aufgrund der Besselschen Ungleichung konvergent in H , denn

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, g_k \rangle|^2 \|g_k\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, g_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \rightarrow \text{Auch } \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, g_k \rangle g_k \text{ konvergent}$$

Jedem $x \in H$ wird die Fourierreihe $\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, g_k \rangle g_k$ zugeordnet:

$$x \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, g_k \rangle g_k$$

Schreibweise:

$$x \sim \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, g_k \rangle g_k$$

Es erhebt sich folgendes Problem: Unter welchen Bedingungen an das Orthonormalsystem $\{g_k\}$ ist

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, g_k \rangle g_k \quad ?$$

Dies ist äquivalent zu

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \langle x, g_k \rangle g_k \Leftrightarrow \left\| x - \sum_{k=1}^n \langle x, g_k \rangle g_k \right\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

4.2.15 Definition: Vollständiges Orthonormalsystem

Ein Orthonormalsystem $\{g_k\}_{k \in I} \subset H$ heißt *vollständig* $:\Leftrightarrow$

$$\forall x \in H : [(\forall k \in I : \langle x, g_k \rangle = 0) \Rightarrow x = 0]$$

Mit anderen Worten, ist ein Orthonormalsystem $\{g_k\}_{k \in I}$ genau dann vollständig wenn nur für $x = 0$ gilt:

$$x \perp g_k \quad \forall k \in I$$

4.2.16 Satz über vollständige Orthonormalsysteme

Sei $\{g_k\}_{k \in I}$ ein Orthonormalsystem in einem separablen, unendlich dimensionalen Hilbertraum. Dann gilt:

$$\{g_k\}_{k \in I} \text{ ist vollständig} \Leftrightarrow \forall x \in H : \|x\|^2 = \sum_{k \in I} |\langle x, g_k \rangle|^2 \quad : \text{Parsevalsche Gleichung}$$

Ferner gilt:

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \langle x, g_k \rangle g_k = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, g_k \rangle g_k$$

4.3 Trigonometrische Fourierreihen (klassisch)

4.3.1 Einführung

Betrachten die Räume

$$\mathcal{R}_\pi := \{f \in \mathcal{R}[-\pi, \pi] : f \text{ ist } 2\pi \text{ periodisch und } \mathcal{R}\text{-integrierbar}\}$$

$$\mathcal{C}_\pi^k := \left\{ f \in \mathcal{C}^k[-\pi, \pi] : f \text{ ist } 2\pi \text{ periodisch auf } \mathbb{R} \text{ und } f^{(k)} \text{ stetig} \right\}$$

und die Vervollständigung $L_2[a, b]$ von $\mathcal{R}[a, b]$ in der Norm

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}$$

mit

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \quad \text{für } f \in \mathcal{R}[a, b]$$

Die Räume $[\mathcal{R}_\pi, \|\cdot\|_\infty]$ und $[\mathcal{C}_\pi, \|\cdot\|_\infty]$ sind vollständig. Dagegen sind die Räume $[\mathcal{R}_\pi, \|\cdot\|_2]$ und $[\mathcal{C}_\pi, \|\cdot\|_2]$ nur Prähilberträume. Die Vervollständigung ist der Raum $L_2[a, b]$ der Lebesgue-Integrierbaren Funktionen.

Die Konvergenz bzgl. $\|\cdot\|_2$ heißt *Konvergenz im Quadratischen Mittel* und die Konvergenz bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ heißt *gleichmäßige Konvergenz*:

$$\|f_n - f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Es gilt:

$$\|f - g\|_2 \leq \sqrt{b-a} \cdot \|f - g\|_\infty$$

Somit impliziert gleichmäßige Konvergenz auch Konvergenz im Mittel.

Ferner führt man die *punktweise Konvergenz* einer Funktionenfolge f_n auf $[a, b]$ ein:

$$f_n \xrightarrow{\text{Punktweise}} f \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

Gleichmäßige Konvergenz impliziert punktweise Konvergenz!

4.3.2 Trigonometrische Orthonormalsysteme

Betrachten die Orthonormalsysteme:

a) Das reelle trigonometrische System auf $[\mathcal{R}_\pi, \|\cdot\|_2]$ bzw. $L_2(\pi)$:

$$g_0 := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad g_1 := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos t, \quad g_2 := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin t, \quad \dots, \quad g_{2k-1} := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(kt), \quad g_{2k} := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kt)$$

b) Das komplexe trigonometrische System

$$g_k := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikt}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Für beide Systeme gilt:

$$\langle g_k, g_l \rangle = \delta_{kl}$$

mit

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \overline{g(t)} dt$$

Bemerkung: Die Gleichheit

$$x = \sum_k \langle x, g_k \rangle g_k$$

gilt zwar im Hilbertraum, d.h im $L_2(\pi)$, aber nicht im $[\mathcal{R}_\pi, \|\cdot\|_\infty]$. Aufgrund der Mittel-Norm können sich nämlich zwei *gleiche* Funktionen f, g , im Sinne von

$$\|f - g\|_2 = 0$$

trotzdem in endlich vielen Punkten unterscheiden.

4.3.3 Fourierreihe im reellen Orthonormalsystem

Betrachten die reelle Fourierreihe

$$f \sim \sum_{k=0}^{\infty} \langle f, g_k \rangle g_k$$

und schreiben:

$$\begin{aligned}
 S_n(f) &:= \langle f, g_0 \rangle g_0 + \sum_{k=1}^n \{ \langle f, g_{2k-1} \rangle g_{2k-1} + \langle f, g_{2k} \rangle g_{2k} \} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) ds + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \cos(ks) ds \cdot \cos(kt) + \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \sin(ks) ds \cdot \sin(kt) \right\} \\
 &=: \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) \quad , \quad S(f) := \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f)
 \end{aligned}$$

mit den Fourierkoeffizienten

$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \cos(ks) ds \quad : \quad k = 0, 1, 2, \dots \\
 b_k &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \sin(ks) ds \quad : \quad k = 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

Zusammenhang mit den ursprünglichen Fourierkoeffizienten:

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle f, g_{2k-1} \rangle \quad , \quad b_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle f, g_{2k} \rangle \quad , \quad a_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \langle f, g_0 \rangle$$

4.3.4 Fourierreihe im komplexen Orthonormalsystem

Behandeln analog auch das komplexe Orthonormalsystem:

$$\begin{aligned}
 f &\sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle f, g_k \rangle g_k \quad , \quad S_n(f) := \sum_{k=-n}^n \langle f, g_k \rangle g_k \\
 \langle f, g_k \rangle g_k &= \left[\int_{-\pi}^{\pi} f(s) \overline{g(s)} ds \right] \cdot g_k(t) = \underbrace{\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-iks} ds}_{C_n(f)} \cdot e^{ikt}
 \end{aligned}$$

mit den Fourierkoeffizienten $C_n := C_n(f)$.

Zusammenhang mit der reellen Form: Zwischen den beiden Orthonormalsystemen bzw. Fourierreihen besteht folgender Zusammenhang:

$$\begin{aligned}
 C_0 &= \frac{a_0}{2} \quad , \quad C_n = \frac{1}{2} (a_n - ib_n) \quad , \quad C_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + ib_n) \\
 a_0 &= 2C_0 \quad , \quad a_n = C_n + C_{-n} \quad , \quad b_n = i(C_n - C_{-n})
 \end{aligned}$$

Bemerkung: Ist f reell, so folgt unmittelbar dass $C_{-n} = \overline{C_n}$ ist, denn

$$C_{-n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x) e^{inx}} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x) e^{-inx}} dx = \overline{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx} = \overline{C_n}$$

4.3.5 Rechenregeln

Seien $f, g \in \mathcal{R}_\pi$ bzw. $L_2(\pi)$. Dann gilt:

a)

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \int_{a-\pi}^{a+\pi} f(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(b+t) dt \quad a, b \in \mathbb{R}$$

b) Linearität:

$$C_n(\alpha f + \beta g) = \alpha C_n(f) + \beta C_n(g), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Analoges gilt auch für die reellen Fourierkoeffizienten.

c)

$$C_n(f_a) = e^{ina} C_n(f) : f_a(t) := f(a+t)$$

d)

$$S_n(f_a, t) = S_n(f, a+t)$$

e)

$$C_n(e^{it} f) = C_{n-1}(f)$$

f)

$$f(t) = \alpha : const \rightarrow S_n(f, t) = \alpha : n \in \mathbb{N}$$

g)

$$|C_n(f)| \leq \frac{1}{2\pi} \|f\|_1, \quad \|f\|_1 := \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt$$

h)

$$f \text{ gerade} \rightarrow b_n(f) = 0$$

$$f \text{ ungerade} \rightarrow a_n(f) = 0$$

i)

$$f \in \mathcal{C}_\pi^1 \Rightarrow C_n(f') = in C_n(f), \quad a_n(f') = n b_n(f), \quad b_n(f') = -n a_n(f)$$

j)

$$f \in \mathcal{C}_\pi^2 \Rightarrow |C_n(f)| \leq \frac{\|f''\|_1}{2\pi} \cdot \frac{1}{n^2}$$

Somit ist die Fourierreihe auch absolut konvergent.

4.3.6 Trigonometrischen Polynome

Definieren

$$\mathcal{T}_n := \left\{ p(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) : a_k, b_k \in \mathbb{R} \right\}$$

als Menge der *trigonometrischen Polynome* vom Grad $\leq n$.

4.3.7 Besselsche Ungleichung & beste Approximation

Sei $f \in [\mathcal{R}_\pi, \|\cdot\|_2]$ bzw. $f \in L_2(\pi)$. Dann gilt:

a)

$$\|f - S_n(f)\|_2 = \inf_{p \in \mathcal{T}_n} \|f - p\|_2$$

b)

$$f - S_n(f) \perp \mathcal{T}_n \text{ d.h. } \forall p \in \mathcal{T}_n : \langle f - S_n(f), p \rangle = 0$$

c)

$$\|f - S_n(f)\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right]$$

d)

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \|f\|_2^2$$

Bemerkung: Es gilt sogar die Gleichheit in der Besselschen Ungleichung, d.h. Parsevalsche Gleichung für $f \in \mathcal{R}_\pi$ bzw. $f \in L_2(\pi)$:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \|f\|_2^2$$

Analoge Aussagen erhält man für die Menge der komplexen trigonometrischen Polynome vom Grad $\leq n$:

$$\mathcal{T}_n^{\mathbb{C}} := \left\{ p(x) = \sum_{k=-n}^n a_k e^{ikx} : a_k \in \mathbb{C} \right\}$$

4.3.8 Lemma von Riemann-Lebesgue

a) Sei $f \in \mathcal{R}_\pi$ oder $f \in L_2(\pi)$. Dann sind die Folgen

$$a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt, \quad b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt$$

konvergent gegen 0:

$$a_n, b_n \rightarrow 0$$

b) Sei $f \in \mathcal{R}[a, b]$ oder $f \in L_2[a, b]$. Dann gilt:

$$\int_a^b f(t) \cos(nt) dt, \quad \int_a^b f(t) \sin(nt) dt \rightarrow 0$$

4.3.9 Integraldarstellung von Teilsummen - Der Dirichlet Kern

Beginnend mit der Definition der Partialsummen S_n schreiben wir

$$\begin{aligned} S_n(f, x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt \cdot \cos(kx) + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt \cdot \sin(kx) \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (\cos(kt) \cos(kx) + \sin(kt) \sin(kx)) \right] dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos[k(t-x)] \right] dt \end{aligned}$$

Mit dem so genannten *Dirichlet-Kern*

$$D_n(\alpha) := \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(k\alpha) = \frac{\sin\left[(2n+1)\frac{\alpha}{2}\right]}{2\sin\frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

gilt:

i)

$$S_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) D_n(s-x) ds = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+t) + f(x-t)] \cdot D_n(t) dt$$

ii) Für $f = 1$ gilt $S_n(f, x) = 1$ und somit ist

$$\int_0^{\pi} D_n(t) dt = \frac{\pi}{2}$$

iii) Die Fourierreihe von $f \in \mathcal{R}_{\pi}$ ($f \in L_2(\pi)$) konvergiert im Punkt $x \in \mathbb{R}$ genau dann gegen $f(x)$ wenn

$$S_n(f, x) - S(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+t) + f(x-t) - 2S(x)] D_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

gilt.

4.3.10 Riemannscher Lokalisationssatz

Die Fourierreihe von $f \in \mathcal{R}_{\pi}$ ($f \in L_2(\pi)$) konvergiert im Punkt x genau dann gegen $f(x)$, wenn für irgendein $0 < \delta \leq \pi$ gilt:

$$\int_0^{\delta} [f(x+t) + f(x-t) - 2S(x)] D_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Bemerkung: Der Lokalisationssatz besagt, dass bereits die Funktionswerte in einer beliebig kleiner δ -Umgebung von x das Konvergenzverhalten der Fourierreihe an der Stelle x festlegen. Wie die Funktion außerhalb einer solchen Umgebung verläuft, ist völlig belanglos.

4.3.11 Punktweise & Gleichmäßige Konvergenz von Fourierreihen

Sei $f \in \mathcal{R}_{\pi}$ ($f \in L_2(\pi)$).

i) Existieren in $x \in \mathbb{R}$ die Grenzwerte $f(x+0)$, $f(x-0)$ sowie

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t}, \quad \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(x-t) - f(x-0)}{t}$$

Dann gilt:

$$S(f, x) := \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f, x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

d.h die Fourierreihe konvergiert gegen das Mittel der beiden Grenzwerte von f (linksseitiger & rechtsseitiger).

ii) Ist $f \in \mathcal{R}_{\pi}$ stückweise stetig differenzierbar, so gilt:

$$S(f, x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

iii) Ist $f \in \mathcal{C}_{\pi}$ und $\exists f'$, dann gilt:

$$S(f, x) = f(x)$$

iv) Ist $f \in \mathcal{C}_\pi$ stückweise stetig differenzierbar, so gilt

$$\|f - S_n(f)\|_\infty = \sup_{x \in [-\pi, \pi]} |f(x) - S_n(f, x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

d.h die Fourierreihe konvergiert gleichmäßig gegen f .

4.3.12 Gliedweise Differentiation & Integration von Fourierreihen

Gliedweise Differentiation: Sei $f \in \mathcal{C}_\pi$ und stückweise stetig differenzierbar. Dann erhält man die Fourierreihe von f' durch gliedweise Differentiation der Fourierreihe von f . Sie konvergiert an der Stelle x gegen $f'(x)$, falls $f''(x)$ existiert.

Gliedweise Integration: Sei $f \in \mathcal{R}_\pi$ und $g \in \mathcal{R}[\alpha, \beta]$. Dann gilt:

$$\int_\alpha^\beta f(x)g(x) dx = \int_\alpha^\beta \frac{a_0}{2}g(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_\alpha^\beta [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] \cdot g(x) dx$$

Insbesondere folgt für $g = 1$:

$$\int_\alpha^\beta f(x) dx = \int_\alpha^\beta \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_\alpha^\beta [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] dx$$