Analysis 3 - Partielle Differentialgleichungen
FSU Jena - WS 2008/2009
- Klausur -

23.02.2009

---

1. a) (2P) Wann heißt eine Funktion u auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ harmonisch?
   b) (4P) Formulieren Sie das Maximumprinzip für harmonische Funktionen auf einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

2. a) (2P) Wie ist der Wärmeleitungskern $\Gamma(x,t),\ x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0$ definiert?
   b) (5P) Wie lautet der Satz über die Lösung des Anfangswertproblems für die homogene Wärmeleitungsgleichung in $\mathbb{R}^{n+1}_+$?

3. (2P) Nennen Sie die Definition des sphärischen Mittels $m(x,r,u)$ einer Funktion $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^3)$

4. a) (3P) Wie lautet das Anfangswertproblem für die Wellengleichung im $\mathbb{R}^n$?
   b) (4P) Nennen Sie den Satz über die Lösung des Anfangswertproblems der homogenen Wellengleichung im $\mathbb{R}^3$ (Lösungsformel).

5. (3P) Berechnen sie die Bogenlänge der Kurve

$$x(t) = R(t - \sin t)$$
$$y(t) = R(1 - \cos t)$$

zwischen den Punkten $(0,0)$ und $(2\pi R, 0)$.
Hinweis: Es gilt

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$$

6. (6P) Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=R^2} \left(x^4 + y^4 + z^4\right)\ do$$

mit Hilfe des Integralsatzes von Gauß.

7. a) (5P) Entwickeln Sie die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x & : -\pi < x < \pi \\ 0 & : x = \pm\pi \end{cases}$$

   in eine Fourierreihe.
   b) (3P) Berechnen Sie die Summe der Reihe

$$S = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \pm \frac{1}{2k+1} \pm \ldots$$

8. (6P) Eine Saite der Länge l werde in der Mitte um h angehoben. Lösen Sie die Anfangswertaufgabe für die Wellengleichung bei dieser dreieckförmigen Auslenkung ohne Anfangsgeschwindigkeit.