Analysis 3
FSU Jena - WS 2007/2008
- Klausur -

Prof. Bernd Carl

4. März, 2008

Aufgabe 01

a) Sei $\varphi : G \subset \mathbb{R}^m \to F \subset \mathbb{R}^n,\ 1 \leq m \leq n$ eine Parametrisierung der Fläche F in $\mathbb{R}^n$ und $f : F \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wie ist das m-dimensionale Integral

$$\int_F f(x)\ dS(x)$$

von f über die Fläche F definiert?

b) Sei $g : G \subset \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $F \subset \mathbb{R}^n$ durch

$$F := \{(u_1, ..., u_{n-1}, u_n) \in G \times \mathbb{R} : u_n = g(u_1, ..., u_{n-1})\}$$

beschrieben. Wie kann man das $(n-1)$-dimensionale Oberflächenintegral

$$\int_F f(x)\ dS(x)$$

berechnen?

c) Es sei $\varphi : G \subset \mathbb{R}^2 \to F \subset \mathbb{R}^3$ eine Parametrisierung von F.
Wie kann man das vektorielle Oberflächenelement $d\vec{A}$ durch φ beschreiben?

Aufgabe 02

a) Wie lautet der Stokessche Satz?

b) Beweisen Sie mit Hilfe des Stokesschen Satzes den Greenschen Satz der Ebene.

c) Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ ein Normalbereich. Zeigen Sie die Formel

$$\mathrm{vol}_2(B) = \frac{1}{2} \int_{\partial B} (xdy - ydx)$$

Aufgabe 03

a) Was versteht man unter dem Dirichletschen Randwertproblem für die Poissongleichung? Wie lautet der Eindeutigkeitssatz?

b) Welche allgemeine Form hat ein Polynom $u(x,y)$ höchstens 2. Grades, das die Laplacegleichung

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

erfüllt?

c) Sei $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 < 1\}$.
Man löse das Dirichletsche Randwertproblem

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

mit

$$u\,|_{\partial G} = \varphi(x,y) = -y^2 + xy + x + 1$$

<u>Hinweis:</u> Nutzen Sie Teil (b).

Aufgabe 04

a) Wie sieht die allgemeine Gestalt der Lösung der 1-dimensionalen homogenen Wellengleichung

$$u_{tt} - u_{xx} = 0,\ x, t > 0$$

mit den Rand-Anfangsbedingungen $u(x,0) = 0$ für $x > 0$ und $u(0,t) = 0$ für $t > 0$ aus?

b) Welche Lösung ergibt sich für (a), wenn zusätzlich die Anfangsbedingung $u_t(x,0) = \cos(x),\ x \geq 0$, erfüllt ist?

Aufgabe 05

a) Zeigen Sie, dass

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{t^{2k}}{(2k)!} \Delta^k \varphi(x) + \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \Delta^k \psi(x) \right]$$

im Konvergenzfall das Cauchy-Problem für die homogene Wellengleichung

$$u_{tt} - \Delta u = 0,\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x),\ x \in \mathbb{R}^n$$

löst.

b) Lösen Sie obiges Problem für $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ mit

$$u(x,0) = u(x_1, x_2, 0) = e^{x_2} \sin x_1$$

$$u_t(x,0) = u_t(x_1, x_2, 0) = x_1^2 + x_2$$

Aufgabe 06

a) Was versteht man unter einer trigonometrischen Fourierreihe einer 2π-periodischen integrierbaren Funktion?

b) Welche Werte ergeben sich für die Fourierreihe einer stückweise stetig differenzierbaren 2π-periodischen Funktion für die die Werte $f(x+0)$ und $f(x-0)$ existieren?

c) Wie lautet die Fourierreihe der Funktion $f(x) = |x|$ im Intervall $[-\pi, \pi]$?

d) Welcher Wert ergibt sich für die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$?