Übungen zur Analysis II SS 08

10. Serie

***1. [2 P.]** Bestimmen Sie den Normalenvektor zur Fläche $z = x^2 + y^2$ im Punkt (1,2,5) und die Gleichung der entsprechenden Tangentialebene.

***2. [2 P.]** Bestätigen Sie, dass das Tripel

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0),\ \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0),\ \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\right)$$

der Normalenvektor der Fläche $F(x, y, z) = 0$ im Punkt (x_0, y_0, z_0) ist (F sei differenzierbar). Wie lautet die Gleichung der Tangentialebene?

***3.** Bestimmen Sie den Normalenvektor und die Gleichung der Tangentialebene zu

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ im Punkt (6,2,3)

*b) **[2 P.]** $\sin xy + \sin yz + \sin xz = 1$ im Punkt $\left(\sqrt{\pi/2},\ \sqrt{\pi/2},\ \sqrt{2\pi}\right)$

***4.** Berechnen Sie die lokalen und globalen Extremwerte der auf $\mathbb{R}^2$ definierten Funktionen

a) $f(x, y) = x^3 - y^3$

*b) **[3 P.]** $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$

c) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy + 1$.

5. Berechnen Sie die Extremwerte der Funktion

$$f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$$

im Quadrat $0 \le x, y \le \pi/2$.

6. Lineare Ausgleichsrechnung. Eine Größe y wird zu n verschiedenen Zeitpunkten $x_1, \ldots x_n$ gemessen. Man erhält auf diesem Wege eine Folge von Messwerten $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$. Außerdem sei bekannt, dass zwischen x und y ein linearer Zusammenhang besteht, also $y(x) = ax+b$ gilt. Da man im allgemeinen nicht davon ausgehen kann, dass die gemessenen Werte exakt sind, muss sich diese Abhängigkeit nicht unmittelbar in die Daten widerspiegeln.
Berechnen Sie die optimalen Werte für a und b!
Hierbei bedeutet optimal, dass der Fehler (in der euklidischen Norm)

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)^2\right)^{1/2}$$

minimal wird.
Hinweis: Benutzen Sie die Identität

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i - x_j)^2 = n\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_i x_j \ .$$

Zu den mit * gekennzeichneten Aufgaben sind schriftliche Lösungen anzufertigen und in der Woche vom **16.06. - 20. 06.** in den Übungen abzugeben.