Übungen zur Analysis II SS 08

9. Serie

***1.** Es sei $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$ für $1 \le x \le 2$.

*a) **[3 P.]** Zeigen Sie, dass f eine Kontraktion im Intervall $[1,2]$ ist, und bestimmen Sie den Fixpunkt.

*b) **[2 P.]** Wieviele Iterationsschnitte sind nötig, um den Fixpunkt vom Startwert $x_0 = 1,5$ aus mit der Genauigkeit von 10^{-3} zu bestimmen?

2. Die Abbildung K in $C[0,1/2]$ sei definiert durch

$$Kf(x) = 1 + \int_0^x t f(t)\, dt \ .$$

a) Zeigen Sie, dass K genau einen Fixpunkt hat.

b) Bestimmen Sie eine Potenzreihenentwicklung des Fixpunktes, indem Sie die Iteration mit der Anfangsfunktion $f_0(x) = 0$ für alle $x \in [0,1/2]$ starten.

c) Welche Funktion gehört zu dieser Potenzreihe?

3. Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch $f(x,y) = (u(x,y),\ v(x,y))$ mit $u(x,y) = \sin x \cosh y$ und $v(x,y) = \cos x \sinh y$.

a) Bestimmen Sie $f(G_1)$ und $f(G_2)$ für

$$G_1 = \{(x,y) : 0 < x < \pi/2\} \text{ und } G_2 = \{(x,y) :\ \pi/2 < x < \pi\} \ .$$

b) Entscheiden Sie, ob f injektiv ist auf G_1, G_2 bzw. $G_1 \cup G_2$.

***4.** **[4 P.]** Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} &xe^{u+v} + 2uv - 1 = 0 \\ &ye^{u-v} + \frac{u}{1+v} - 2x = 0 \end{aligned}$$

durch differenzierbare Funktionen $u = \varphi(x,y)$ und $v = \psi(x,y)$ mit $\varphi(1,2) = 0 = \psi(1,2)$, definiert in einer Umgebung von $(1,2)$, aufgelöst werden kann.
Berechnen Sie die ersten partiellen Ableitungen von φ und ψ an der Stelle (1,2).

Zu den mit * gekennzeichneten Aufgaben sind schriftliche Lösungen anzufertigen und in der Woche vom **09.06. - 13. 06.** in den Übungen abzugeben.