Übungen zur Analysis II SS 08

8. Serie

1. Bestimmen Sie die Taylor-Polynome zweiter Ordnung der folgenden Funktionen, entwickelt im jeweils angegebenen Punkt:

a) $f(x, y) = x \cos y$ im Punkt (1, 0)

*b) **[2 P.]** $f(x, y) = xe^{xy}$ im Punkt (0, 1)

c) $f(x, y) = \cos x \sin y$ im Punkt (0, 0)

*d) **[2 P.]** $f(x, y) = x^3y^7 - 2x^2y + 1$ im Punkt (0, 1)

e) $f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y - 2x$ im Punkt (1, -1)

2. Beweisen Sie:

a) Die Teilmenge $B_\varepsilon(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) < \varepsilon\}$ des metrischen Raumes $[X, d]$ ist offen.

b) Die Teilmenge $\overline{B}_\varepsilon(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) \leq \varepsilon\}$ ist abgeschlossen.

3. Beweisen Sie für metrische Räume:

a) Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen.

b) Der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

c) Die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen.

d) Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

***4.** Bestätigen Sie durch Gegenbeispiele:

*a) **[1 P.]** Der Durchschnitt offener Mengen muss nicht offen sein.

*b) **[1 P.]** Die Vereinigung abgeschlossener Mengen muss nicht abgeschlossen sein.

***5.** **[5 P.]** Die Abbildung K von einem metrischen Raum $[X_1, d_1]$ in einen metrischen Raum $[X_2, d_2]$ ist eine Kontraktion, wenn eine Zahl $0 \leq q < 1$ existiert, so dass für alle $x, y \in X_1$ gilt

$$d_2(Kx, Ky) \leq q d_1(x, y) \ .$$

Beweisen Sie den Banachschen Fixpunktsatz:
Jede Kontraktion K in einem vollständigen metrischen Raum $[X, d]$ hat genau einen Fixpunkt x(d.h.$Kx = x$). Dieser lässt sich approximieren durch die Folge (x_n) mit $x_n = K^n x_0$, wobei x_0 beliebig gewählt ist. Es gilt die Fehlerabschätzung

$$d(x_n, x) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x_0, x_1) \ .$$

Hinweis: Zeigen und verwenden Sie, dass (x_n) eine Cauchy-Folge ist.

Zu den mit * gekennzeichneten Aufgaben sind schriftliche Lösungen anzufertigen und in der Woche vom **02.06. - 06.06.** in den Übungen abzugeben.