Übungen zur Analysis II SS 08

7. Serie

1. Bestimmen Sie die Richtungsableitungen, sofern diese existieren:

$f(x,y) = \frac{y}{1+x^2}$	in der Richtung	$(1/\sqrt{2})(-1,1)$	im Punkt	(1,2),
$f(x,y) = \sqrt{xy}$	in der Richtung	$\frac{1}{2}(1,\sqrt{3})$	im Punkt	(2,2),
$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$	in der Richtung	$\frac{1}{2}(\sqrt{2},\sqrt{2})$	im Punkt	(3,4),
$f(x,y) = (xy)^{1/3}$	in beliebiger Richtung		im Punkt	(0,0).

***2.** **[2 P.]** Die Funktion $U(x,y)$ sei gegeben. Ersetzen wir die kartesischen Koordinaten durch die Polarkoordinaten r, φ, dann erhalten wir auf diesem Wege eine Funktion $u(r,\varphi) = U(x,y)$. Weisen Sie folgende Identität nach

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} .$$

Hinweis: Bestätigen Sie die Gleichung von rechts nach links.

3. Die Kugelkoordinaten r, ϑ, φ sind mit den kartesischen Koordinaten x, y, z gekoppelt durch

$$\begin{aligned} x &= r\sin\vartheta\ \cos\varphi \\ y &= r\sin\vartheta\ \sin\varphi \\ z &= r\cos\vartheta \end{aligned}$$

Bestätigen Sie für $u(r,\vartheta,\varphi) = U(r\sin\vartheta\cos\varphi, r\sin\vartheta\sin\varphi, r\cos\vartheta)$ die Formel

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{r^2}\cot\vartheta\frac{\partial u}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

***4.** *a) **[2 P.]** Es sei $f(x_1,\ldots,x_n) = g(\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2})$.

Formulieren Sie $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}$ mit Ableitungen von g

*b) **[2 P.]** Es sei

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} \sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}^{\,2-n} & \text{für} \quad n>2 \\ \log\sqrt{x_1^2+x_2^2} & \text{für} \quad n=2 \end{cases}$$

Berechnen Sie $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}$.

5. Berechnen Sie für die Funktionen

a) $f(x,y) = x^{y^2}$

b) $f(x,y) = \arccos\sqrt{x/y}$

die gemischten partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ und $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$

***6.** **[3 P.]** Berechnen Sie für die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{für} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{für} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) .$$

Zu den mit * gekennzeichneten Aufgaben sind schriftliche Lösungen anzufertigen und in der Woche vom **26.05. - 30.05.** in den Übungen abzugeben.