Übungen zur Analysis II SS 08

5. Serie

1. Es seien (X_1, d_1) und (X_2, d_2) metrische Räume und $f : X_1 \to X_2$.
   Zeigen Sie: f ist genau dann stetig, wenn für jede offene Teilmenge M_2 von X_2 die Menge
   $$M_1 = f^{-1}(M_2) = \{x_1 \in X_1 \;:\; f(x_1) \in M_2\}$$
   eine offene Teilmenge von X_1 ist.

2. Es sei X der lineare Raum aller auf $[-1, 1]$ differenzierbaren Funktionen, ausgestattet mit der Norm
   $$\|x\| = \sup_{-1 \le t \le 1} |x(t)| \; .$$
   Entscheiden Sie, ob die folgenden reellwertigen Funktionen auf X stetig sind:
   a) $f(x) = x(0)$
   b) $f(x) = x'(0)$
   c) $f(x) = \int\limits_{-1}^{+1} x(t)\, dt$.

*3. Skizzieren Sie die Höhenlinien der Funktionen
   *a) **[2 P.]** $f(x, y) = xy$
   *b) **[2 P.]** $f(x, y) = x^2 + 4y^2$

*4. Bestimmen Sie (falls existent) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ für
   *a) **[2 P.]** $f(x, y) = \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}$
   b) $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{x^2 y^2}$

*5. Es sei
   $$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$
   *a) **[2 P.]** Ist jede Einschränkung von f auf eine Gerade $ax + by = 0$ stetig?
   *b) **[2 P.]** Ist f stetig?

Zu den mit * gekennzeichneten Aufgaben sind schriftliche Lösungen anzufertigen und in der Woche vom **13.05. - 16.05. (bei Ausfall eine Woche später)** in den Übungen abzugeben.