Übungen zur Analysis II SS 08

4. Serie

*1. Für natürliche Zahlen n sei $x^{(n)} = ((n+1)^{-k})_{k=0,1,\ldots}$.

*a) **(3P.)** Zeigen Sie $x^{(n)} \in l_2$ und berechnen Sie $\|x^{(n)}\|_2$.

*b) **(3P.)** Weisen Sie nach, dass $(x^{(n)})$ eine Cauchy-Folge ist, und bestimmen Sie den Grenzwert $x = \lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)}$ in l_2 .

2. Sei B der lineare Raum aller beschränkten Zahlenfolgen $x = (x_1, x_2, \ldots)$ ausgestattet mit der Norm $\|x\| = \sup\{|x_i| : i \in \mathbb{N}\}$.

*a) **(2P.)** Geben Sie eine Folge von Elementen aus B an, die koordinatenweise aber nicht im Sinne der Norm konvergiert.

b) Geben Sie eine beschränkte Folge von Elementen aus B an, die keine konvergente Teilfolge enthält.

3. Eine Teilmenge eines reellen linearen Raumes heißt konvex, wenn sie mit zwei Elementen x und y und einer Zahl $\lambda \in (0,1)$ auch das Element $\lambda x + (1-\lambda)y$ enthält. Zeigen Sie, dass die Einheitskugel eines normierten Raumes konvex ist.

4. Es sei M eine nichtleere Menge und $d(x,y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$.

a) Zeigen Sie, dass $d(x,y)$ eine Metrik ist.

b) Welche Eigenschaften hat eine Folge $(x_n) \subseteq M$, die in dieser Metrik gegen $x \in M$ konvergiert?

Zu den mit * gekennzeichneten Aufgaben sind schriftliche Lösungen anzufertigen und in der Woche vom **05.05. - 09.05.** in den Übungen abzugeben.