Übungen zur Analysis II (SS 08)

Serie 3

1. *a) **(2 P.)** Beweisen Sie für $t \geq 0$ und $0 < \alpha < 1$ die Ungleichung $t^\alpha - \alpha t \leq 1 - \alpha$.
   Hinweis: Bestimmen Sie Extrema der Funktion $f_\alpha(t) := t^\alpha - \alpha t$.

   *b) **(2 P.)** Beweisen Sie für $a, b \geq 0$ und $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ die Ungleichung $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.
   Hinweis: Wenden Sie a) an auf $\alpha := \frac{1}{p}$ und $t := \frac{a^p}{b^q}$.

   *c) **(3 P.)** Beweisen Sie die Höldersche Ungleichung:
   Für Zahlen $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und Folgen $x = (x_i)$ und $y = (y_i)$ (reell oder komplex) gilt

   $$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^q \right)^{1/q} = ||x||_p \; ||y||_q \quad .$$

   Hinweis: Wenden Sie b) an auf $a := \frac{|x_i|}{||x||_p}$ und $b := \frac{|y_i|}{||y||_q}$

2. Verallgemeinern Sie die Höldersche Ungleichung zu der folgenden Version:
   Für positive Zahlen p, q, r mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ und n-Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ und $(y_1, \ldots, y_n)$ gilt

   $$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i|^r \right)^{1/r} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q \right)^{1/q}$$

3. Der lineare Raum $I\!R^n$ sei ausgestattet mit den Normen $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$ $(p \geq 1)$ und $\|x\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$.

   a) Geben Sie zu p und q eine Konstante c mit $\|x\|_p \leq c\|x\|_q \quad \forall x$ an.

   b) Zeigen Sie $\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty \quad \forall x$

4. Zeigen Sie, dass auf $I\!R^2$ durch

   $$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \begin{cases} |y_1 - y_2| & \text{für } x_1 = x_2 \\ |y_1| + |y_2| + |x_1 - x_2| & \text{sonst} \end{cases}$$

   eine Metrik definiert ist und charakterisieren Sie die Konvergenz im Sinne dieser Metrik

5. Die Menge aller Folgen sei mit der Metrik

   $$d((x_i), (y_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|}$$

   ausgestattet.

   *a) **(2 P.)** Zeigen Sie die Dreiecksungleichung.
   Hinweis: Zeigen und verwenden Sie die Monotonie der Funktion $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$ für nichtnegative x.

   b) Charakterisieren Sie den Konvergenzbegriff, den diese Metrik erzeugt.

Zu den mit * gekennzeichneten Aufgaben sind schriftliche Lösungen anzufertigen und in der Woche vom 28.04. - 02.05. in den Übungen abzugeben.