Übungen zur Analysis II (SS 08)

Serie 2

1. Berechnen Sie für jede natürliche Zahl n das Integral $\int\limits_{e^{-2\pi n}}^{1} \left| \frac{d}{dx} \cos \log x \right| dx$.

***2.** **(2P.)** Berechnen Sie die Zwischensummen für eine Zerlegung $0 < a = x_0 < \ldots < x_n = b$ mit Zwischenwerten $\tilde{x}_k = \sqrt{x_k x_{k+1}}$ für das Integral $\int\limits_a^b \frac{dx}{x^2}$.

***3.** Berechnen Sie den Grenzwert der Summen

a) **(2P.)** $S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n}$

b) **(2P.)** $S_n = \frac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}}$ $\quad (p > 0)$

für $n \to \infty$, indem Sie diese als Integralsummen auffassen.

***4.** **(2P.)** Zeigen Sie mit dem Integalkriterium, dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+\log n)}$ divergiert, und geben Sie eine natürliche Zahl N an, für die $\sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n(1+\log n)} > 3$ gilt.

5. Für welche Parameter p und q ist das Integral $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{x^p + x^q}$ konvergent?

6. Es seien $a_0, a_1, \ldots, a_n$ und $x_0, x_1, \ldots, x_n$ reelle Zahlen, wobei die x_k paarweise verschieden sind. Welche Funktionswerte hat das Polynom

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)} a_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)} a_1 + \ldots \\ \ldots &+ \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{n-2})(x-x_n)}{(x_{n-1}-x_0)\ldots(x_{n-1}-x_{n-2})(x_{n-1}-x_n)} a_{n-1} + \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)\ldots(x_n-x_{n-1})} a_n \end{aligned}$$

(Interpolationsformel von Langrange) an den Stellen $x = x_k$?

7. Es sei $a < b$ und P ein Polynom zweiten Grades. Beweisen Sie

$$\int\limits_a^b P(x)\,dx = \frac{b-a}{6} \left(P(a) + 4P\left(\frac{a+b}{2}\right) + P(b) \right)$$

(Keplersche Fassregel).

Zu den mit * gekennzeichneten Aufgaben sind schriftliche Lösungen anzufertigen und in der Woche vom 21.04. - 25.04. in den Übungen abzugeben.