Übungen zur Analysis II
FSU Jena - SS 07
Serie 12 - Lösungen

Stilianos Louca

9. Juli 2007

Aufgabe 01

Bezeichnen:

$$\vec{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix},\ \vec{a} := \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} \\ \cdot \\ \frac{1}{a_n} \end{pmatrix},\ \delta := \inf(I),\ I := \left\{ f(\vec{x}) := \vec{x}^2 : \vec{x} \cdot \vec{a} = 1 \right\}$$

Falls die Menge I ein Minimum hat so ist dies auch das Infimum. Wir suchen also den *kürzesten* Vektor $\vec{x}$ bzw. den Wert $|\vec{x}|^2$ für den stets gilt $\vec{x} \cdot \vec{a} = 1$. Unter dieser Hinsicht versuchen wir den Vektor $\vec{x}$ immer mehr zu verkürzen, wollen aber stets den gleichen Wert $\vec{x} \cdot \vec{a} = 1$ behalten. Dies können wir nur tun indem wir $\vec{x}$ immer mehr *parallel* zu $\vec{a}$ orientieren. Offensichtlich geht's irgendwann nicht mehr, und zwar dann wenn $\vec{x} \parallel \vec{a}$ ist. Dann gilt

$$\vec{x} \cdot \vec{a} = |x| \cdot |a| \stackrel{!}{=} 1 \ \Rightarrow\ \delta = |\vec{x}|^2 = \frac{1}{|\vec{a}|^2}$$

Dies wollen wir aber auch *mathematischer* beweisen. Wir suchen also das Minimum der Funktion f unter der Nebenbedingung $g(\vec{x}) = \vec{x} \cdot \vec{a} - 1 = 0$. Betrachten dazu die Funktion $F(\vec{x}, \lambda) := f(\vec{x}) + \lambda \cdot g(\vec{x})$ und fordern

$$\partial_{x_i} F = 2x_i + \frac{\lambda}{a_i} \stackrel{!}{=} 0 \ \Rightarrow\ x_i = -\frac{\lambda}{2a_i} \ \Rightarrow\ \lambda = \frac{-2}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^2}} = -\frac{2}{|\vec{a}|^2} \Rightarrow\ x_i = \frac{1}{a_i\, |\vec{a}|^2} > 0 \ \Rightarrow\ \delta = f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \frac{1}{|\vec{a}|^4} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^2} = \frac{1}{|\vec{a}|^2}$$

Wollen jetzt zeigen dass $f(\vec{x})$ ein Minimum ist. Betrachten dazu die Matrix $\left(\partial_{x_i x_j} F\right)_{i,j=1}^{n}$.

$$\partial_{x_j x_i} F = 2x_i \cdot \delta_{ij} \geq 0 \ \rightarrow\ Positiv\ definit\ \forall\, \vec{h} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\ (Diagonalmatrix) \ \rightarrow\ \delta\ Minimum$$

Aufgabe 02

Bezeichnen: $\vec{N}$ als den Normalenvektor und $\vec{n}$ als den Normaleneinheitsvektor im Punkt $\vec{r}_0$. Sei ferner T die gesuchte Tangentialebene:

$$T = \left\{ \vec{r} \in \mathbb{R}^n \mid (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{N} = 0 \right\}$$

a)

$$F(x, y, z) := x^2 + y^2 - z \equiv 0,\ \vec{N} = \vec{\nabla} F(1, 2, 5) = (2x, 2y, -1) = (2, 4, -1) \ \rightarrow\ \vec{n} = \frac{\vec{N}}{\left|\vec{N}\right|} = \frac{1}{\sqrt{21}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$T : (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{N} = 0 \ \rightarrow\ 2(x - x_0) + 4(y - y_0) - (z - z_0) = 2x + 4y - z - 5 = 0$$

b)

$$F(x,y,z) := 2^{\frac{x}{z}} + 2^{\frac{y}{z}} - 8 \equiv 0,\ \vec{N} = \vec{\nabla}F(2,2,1) = \left(\frac{2^{\frac{x}{z}}\ln 2}{z},\ \frac{2^{\frac{y}{z}}\ln 2}{z},\ -\frac{\ln 2}{z^2}\cdot\left[2^{\frac{x}{z}}x + 2^{\frac{y}{z}}y\right]\right) = \ln 2\cdot(4,4,-16)$$

$$\rightarrow\ \vec{n} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\cdot(1,1,-4),\quad T:(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\vec{n} = 0\ \rightarrow\ (x-x_0)+(y-y_0)-4(z-z_0) = x+y-4z = 0$$

c)

$$F(x,y,z) := z^3 + 3xyz - 1 \equiv 0,\ \vec{N} = \vec{\nabla}F(0,1,1) = (3yz, 3xz, 3z^2+3xy) = (3,0,3)\ \rightarrow\ \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(1,0,1)$$

$$T:(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\vec{N} = 0\ \rightarrow\ (x-x_0)+(z-z_0) = x+z-1 = 0$$

Aufgabe 03

a)

- $$\vec{\nabla}f = (2x,-2y) \overset{!}{=} 0\ \rightarrow\ x = y = 0$$

  $$f''(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\ Indefinit\ \rightarrow\ Kein\ Extremum$$

- $$F(x,y) := x^2 - y^2 + \lambda\cdot(y-2x),\ \nabla F = (2x-2\lambda, \lambda-2y, y-2x) \overset{!}{=} 0\ \rightarrow\ \lambda = x = y = 0,\ f(0,0) = 0$$

  $$f(x,y) = x^2 - y^2 = x^2 - 4x^2 = -3x^2 < 0\ f\ddot{u}r\ (x,y) \neq (0,0)$$

  $$\rightarrow\ Lokales,\ isoliertes,\ Maximum\ unter\ der\ NB\ y = 2x$$

- $$F(x,y) := x^2 - y^2 + \lambda\left(y - \frac{x}{2}\right),\ \vec{\nabla}F = \left(2x - \frac{\lambda}{2},\ \lambda - 2y,\ y - \frac{x}{2}\right) \overset{!}{=} 0\ \rightarrow\ x = y = \lambda = 0,\ f(0,0) = 0$$

  $$f(x,y) = x^2 - y^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{3}{4}\cdot x^2 > 0\ f\ddot{u}r\ (x,y) \neq (0,0)$$

  $$\rightarrow\ Lokales,\ isoliertes,\ Minimum\ unter\ der\ NB\ y = \frac{x}{2}$$

b) Damit $\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{h}$ auf den Tangentialebenen von $g_1, ..., g_k$ liegt muss $\forall\ i = 1, .., k$ gelten

$$\vec{h}\cdot\vec{\nabla}g_i = \sum_{j=1}^{n} h_j\partial_{x_j}g_i = 0\ \rightarrow\ \begin{pmatrix} \partial_{x_1}g_1 & .. & \partial_{x_n}g_1 \\ .. & .. & .. \\ \partial_{x_1}g_k & .. & \partial_{x_n}g_k \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} h_1 \\ .. \\ h_n \end{pmatrix} = \vec{0}$$

das heißt $\vec{h}$ muss im Nullraum von g' liegen!

c) Mittels der Lagrange Methode sucht man im Endeffekt die Punkte $\vec{r} = (x_1, ..., x_n)$ bzw. die Werte $\lambda_1, ..., \lambda_k$ so dass

$$\vec{\mathcal{F}}(\vec{r},\vec{\lambda}) := \begin{pmatrix} \partial_{x_1}f \\ .. \\ \partial_{x_n}f \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{k}\lambda_i\cdot\begin{pmatrix} \partial_{x_1}g_i \\ .. \\ \partial_{x_n}g_i \end{pmatrix} = \frac{\partial F(\vec{r},\vec{\lambda})}{\partial\vec{r}} = \vec{0}$$

der Gradient $\vec{\nabla} f$ also eine Linear-Kombination von den Gradienten $g'_1, .., g'_k$ ist, die Niveaufläche von f an der Stelle $\vec{r}$ also *parallel* zur Nebenbedingungsfläche $\vec{g} = 0$ steht, diese also tangential berührt, und

$$\vec{g} := \begin{pmatrix} g_1 \\ .. \\ g_k \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Sei $\vec{h}$ eine Verrückung vom Punkt $\vec{r}$ so dass $g_i(\vec{r} + \vec{h}) = 0$ bzw. $g_i(\vec{r} + \vec{h}) = o\left(\left|\vec{h}\right|^1\right)$ also $\vec{h}$ in den Tangentialebenen von g_i liegt. Dann folgt

$$f(\vec{r} + \vec{h}) - f(\vec{r}) = F(\vec{r} + \vec{h}) - F(\vec{r}) + o\left(|h|^1\right) = \underbrace{\frac{\partial F}{\partial \vec{r}}(\vec{r})}_{0}\vec{h} + \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial \vec{r}^2}(\vec{r})\vec{h}, \vec{h} \right\rangle + o\left(\left|\vec{h}\right|^1\right) \approx \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial \vec{r}^2}(\vec{r})\vec{h}, \vec{h} \right\rangle$$

woraus eben das *Hesse-Matrix Kriterium* für F folgt. Denn in Extrema unter NB gilt nicht unbedingt $\vec{\nabla} f = 0$ und daher hat f'' auch keinen expliziten Einfluss auf die Werte von f.

Aufgabe 04

$$F(\vec{r}, \lambda) := \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

$$\vec{\nabla} F = \left(\frac{1}{a} + 2\lambda x, \frac{1}{b} + 2\lambda y, x^2 + y^2 - 1\right) \stackrel{!}{=} 0 \;\rightsquigarrow\; x = \pm\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},\; y = \pm\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},\; \lambda = \mp\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2\,|ab|}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \vec{r}} = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix} = 2\lambda \cdot E \;\to\; \mathit{Definit}\ (\mathit{je\ nach}\ \operatorname{sgn}(\lambda)) \;\to\; \mathit{Extremum}$$