

# Übungen zur Vorlesung Analysis II SS 07

## 12. Übungsserie

1.)\* Berechnen Sie

$$\inf \left\{ \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad \text{mit} \quad \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{a_i} = 1, \quad a_i > 0 \right\} .$$

2.) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene und den Normaleneinheitsvektor im angegebenen Punkt an die Fläche

a)  $z = x^2 + y^2$  in  $(1, 2, 5)$  ,

b)\*  $2^{\frac{x}{z}} + 2^{\frac{y}{z}} = 8$  in  $(2, 2, 1)$  ,

c)  $z^3 + 3xyz = 1$  in  $(0, 1, 1)$  .

3.) Das Problem hinreichender Bedingungen für die Extrema mit Nebenbedingungen besteht darin, dass die Vergleichspunkte in der Nähe eines extremwertverdächtigen Punktes ebenfalls die Restriktionen erfüllen müssen.

a) Als Beispiel untersuchen Sie  $f(x, y) = x^2 - y^2$

i. ohne Nebenbedingung,

ii. mit der Nebenbedingung  $y = 2x$  ,

iii. mit der Nebenbedingung  $y = \frac{1}{2}x$  .

b) Die Lösung dieses Problems besteht darin, dass die Vergleichspunkte  $\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{h}$  nicht auf den Restriktionsflächen, sondern auf deren Tangentialebenen genommen werden.

Sei  $f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$  die zu untersuchende Funktion und  $g_i(\vec{x}) = 0 \quad 1 \leq i \leq k < n$  die Nebenbedingungen.

Welche Beziehungen muss es zwischen den Komponenten  $h_i$  von  $\vec{h}$  geben, damit  $\vec{x}$  auf den Tangentialebenen liegt?

c) Warum muss die Hesse-Matrix von  $F(\vec{x}, \vec{\lambda}) = f(\vec{x}) + \sum_{i=1}^k \lambda_i g_i$  (mit den errechneten  $\lambda$ ) für die quadratische Form zur Untersuchung der Extremaleigenschaften verwendet werden und nicht diejenige von  $f(\vec{x})$ ?

d) Wenn man die unter b) erhaltenen Beziehungen in die quadratische Form von c) einsetzt, erhält man eine neue, mit entsprechend reduzierter Ordnung an der sich die bekannten Untersuchungen durchführen lassen.

4.) Führen Sie das Programm von 3. für  $f(x, y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$  mit  $x^2 + y^2 = 1$  durch.

Es wird empfohlen, alle mit \* gekennzeichneten Aufgaben schriftlich zu bearbeiten und in den Übungen in der Woche vom 02.07. bis 06.07.2007 abzugeben.

Bitte beachten Sie den neuen Termin (27.07. ab 10:00 Uhr) der Klausur Analysis I.