Übungen zur Analysis II
FSU Jena - SS 07
Serie 11 - Lösungen

Stilianos Louca

9. Juli 2007

Aufgabe 01

$$F(x,y,z) := 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 \equiv 0$$

$$z'(x,y) = (\partial_x z, \partial_y z) = -(\partial_z F)^{-1} \cdot (\partial_x F, \partial_y F) = -\frac{1}{2z+8x-1} \cdot (4x+8z, 4y) \stackrel{!}{=} \vec{0}\ , \quad 2z+8x-1 \neq 0$$

$$\rightsquigarrow \ \vec{r} \in \left\{ \underbrace{\left(\frac{16}{7}, 0, \frac{-8}{7}\right)}_{\vec{a}},\ \underbrace{(-2,0,1)}_{\vec{b}} \right\}$$

$$z''(\vec{a}) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{15} & 0 \\ 0 & -\frac{4}{15} \end{pmatrix} : Negativ\ definit\ \rightarrow\ Lokales\ Maximum$$

$$z''(\vec{b}) = \begin{pmatrix} \frac{4}{15} & 0 \\ 0 & \frac{4}{15} \end{pmatrix} : Positiv\ definit\ \rightarrow\ Lokales\ Minimum$$

Aufgabe 02

a)

$$F(x,y,z,l,t) := xyz + l(x+y+z-5) + t(xy+yz+xz-8)$$

$$F' = (yz+l+t(y+z), xz+l+t(x+z), xy+l+t(y+x), x+y+z-5, xy+yz+xz-8) \overset{!}{=} 0$$

$$\rightsquigarrow\ (z+t)(y-x) = (x+t)(z-y) = (y+t)(x-z) = 0$$

$$Fall\ a: y = x\ \rightarrow\ (x+t)(z-x) = 0,\ F\ddot{u}r\ z = x\ \vee\ y = z\ \rightsquigarrow\ Widerspruch\ mit\ NB$$

$$\Rightarrow\ y = x = -t\ \overset{NB}{\rightarrow}\ (x,y,z) \in \left\{ \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3} \right),\ (2,2,1) \right\}$$

$$Fall\ b: z = -t\ \rightarrow\ (x-z)(z-y) = 0,\ F\ddot{u}r\ x = z\ \vee\ z = y\ \rightsquigarrow\ Analoger\ Fall\ wie\ vorhing$$

$$\Rightarrow\ (x,y,z) \in \left\{ \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3} \right), \left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3} \right), \left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3} \right), (2,2,1), (2,1,2), (1,2,2) \right\}$$

Aufgabe 3

Offensichtlich ist das Infimum gleich dem Minimum, nämlich 0. Das Maximum ergibt sich für $x^2+y^2+z^2 = 100$. Die Summe $x^2+2y^2+3z^2 = x^2+2y^2+3(100-y^2-x^2) = -2x^2-y^2+300$ wird dann maximal für $x = y = 0$ bzw. $z = 10$ also $\sup M = 300$.

Aufgabe 04

Sei $\vec{P} = (x,y,z)$ ein beliebiger Punkt auf der Fläche und $\vec{r} := \vec{P} - \vec{P}_0 = (x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ der Verschiebungsvektor von P_0 zu P. Dann muss gelten

$$ax + by + cz = d$$

Methode 1 Die Länge $|\vec{r}|$ wird minimal wenn $\vec{r} \parallel\ \vec{\nabla} \cdot F$ wobei $\nabla F = (a,b,c)$ der Flächennormalenvektor auf der Ebene $F = ax+by+cz-d = 0$ ist, also

$$\vec{r} = \lambda \cdot (\vec{\nabla} \cdot F) = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \\ \lambda c \end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \vec{P} = \begin{pmatrix} x_0 + \lambda a \\ y_0 + \lambda b \\ z_0 + \lambda c \end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{R}$$

Da $\vec{P}$ auf der Fläche liegt muss gelten

$$ax_0 + \lambda a^2 + by_0 + \lambda b^2 + cz_0 + \lambda c^2 = ax_0 + by_0 + cz_0 + \lambda = d\ \Rightarrow\ \lambda = d - ax_0 - by_0 - cz_0$$

Der kleinste Abstand ergibt sich also als

$$|\vec{r}| = |\lambda| \cdot \sqrt{a^2+b^2+c^2} = |\lambda|$$

womit also auch der Punkt $\vec{P}$ festgelegt ist.

Methode 2 Der Abstand ist gegeben durch $r = |\vec{r}| = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$. Gesucht ist der Punkt $\vec{P}$ für den r unter der Nebenbedingung $ax + by + cz - d = 0$ minimal wird.

$$F(x, y, z, \mu) := (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 + \mu(ax + by + cz - d), \ \ \mu \in \mathbb{R}$$

$$\vec{\nabla} \cdot F = (2x - 2x_0 + \mu a, 2y - 2y_0 + \mu b, 2z - 2z_0 + \mu c, ax + by + cz - d) \overset{!}{=} \vec{0}$$

$$\rightsquigarrow \ \ \mu = 2(\underbrace{x_0 a + y_0 b + z_0 c - d}_{f_0}) \ \Rightarrow \ \vec{P} = \begin{pmatrix} x_0 - af_0 \\ y_0 - bf_0 \\ z_0 - cf_0 \end{pmatrix}$$