Übungen zur Analysis II
FSU Jena - SS 07
Serie 10 - Lösungen

Stilianos Louca

25. Juni 2007

Aufgabe 01

a) Die Funktion $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ muss in der Umgebung von (x_0, y_0, z_0) stetig differenzierbar sein und es muss gelten

$$\partial_{x_i} F \neq 0 \ : i = 1, 2, 3$$

b) Aus

$$x'(y,z) = (\partial_y x, \partial_z x) = -\left(\partial_x F\right)^{-1} \cdot \partial_{(y,z)} F = -\left(\partial_y F, \partial_z F\right)$$

folgt

$$(1) : \partial_x F \cdot \partial_y x = -\partial_y F \ \wedge \ (2) : \partial_x F \cdot \partial_z x = -\partial_z F$$

und analog

$$(3) : \partial_y F \cdot \partial_z y = -\partial_z F \ \wedge \ (4) : \partial_z F \cdot \partial_x z = -\partial_x F$$

woraus man durch verknüpfen auf

$$-\partial_y F \overset{1}{=} \partial_x F \cdot \partial_y x \overset{4}{=} -\partial_z F \cdot \partial_x z \cdot \partial_y x \overset{3}{=} \partial_y F \cdot \partial_z y \cdot \partial_x z \cdot \partial_y x \ \Rightarrow \ \partial_z y \cdot \partial_x z \cdot \partial_y x = -1$$

kommt. $\square$

Aufgabe 02

Aus

$$y' = (\partial_{x_1} y, ..., \partial_{x_n} y) = -\left(\partial_y F\right)^{-1} \cdot \partial_{\vec{x}} F = -\left(\partial_y F\right)^{-1} \cdot \left(\partial_{x_1} F, ..., \partial_{x_n} F\right)$$

folgt

$$\partial_{x_i} y = -\frac{\partial_{x_i} F}{\partial_y F}$$

und ferner

$$\partial_{x_j x_i} y = \frac{\partial_{x_i} F \cdot \partial_{x_j y} F - \partial_{x_j x_i} F \cdot \partial_y F}{\left(\partial_y F\right)^2}$$

Oberer Ausdruck ist möglich solange $\partial_y F$ invertierbar ist d.h in diesem Fall $\partial_y F \neq 0$ und F in der Umgebung von $\vec{x}_0$ stetig differenzierbar ist.

Aufgabe 03

In einer Umgebung $B_\varepsilon(\vec{1}),\ \varepsilon < 1$ von $\vec{1}$ gilt wegen

$$y = \frac{1}{xz}$$

folgender Ausdruck

$$F(z,x) := x^{\frac{1}{xz}} + z^x + z^{\frac{1}{xz}} - 3 \equiv 0$$

Da

$$\partial_x F = x^{\frac{1}{xz}} \cdot \frac{(1-\ln x)}{zx^2} + z^x \ln z - \frac{z^{\frac{1}{xy}} \ln z}{x^2 z} = 1 \neq 0 \ f\dot{u}r\ \vec{r} = \vec{1}$$

existiert dort eine Auflösung $x = x(z)$. Analog gilt auch

$$G(z,y) := \frac{1}{(yz)^y} + z^{\frac{1}{yz}} + z^y - 3 \equiv 0$$

und

$$\partial_y G = \frac{-1 - \ln yz}{(yz)^y} - \frac{z^{\frac{1}{zy}} \ln z}{y^2 z} + z^y \ln z = -1 \neq 0$$

woraus folgt dass es auch eine Auflösung $y = y(z)$ gibt. Durch direktes einsetzen sieht man dass $x(z=1) = 1$ und $y(z=1) = 1$. Ferner gilt

$$x'(z=1) = -(\partial_x F)^{-1} \cdot \partial_z F = -1 \cdot \left(\frac{x^{\frac{1}{xz}} \ln x}{-xz^2} + xz^{x-1} + z^{\frac{1}{xz}} \cdot \frac{(1-\ln x)}{xz^2} \right) = -2$$

und

$$y'(z=1) = -(\partial_y G) \cdot \partial_z G = 1 \cdot \left(-y^{1-y} z^{-y-1} + z^{\frac{1}{yz}} \cdot \frac{(1-\ln z)}{yz^2} + yz^{y-1} \right) = 1$$

Aufgabe 04

Aus

$$u = x - \ln v > 0 \ \Rightarrow\ y = v - \ln(x - \ln v) \ \Rightarrow\ F(x,y,v) := v - y - \ln(x - \ln v) \equiv 0$$

und

$$\partial_v F = 1 + \frac{1}{\underbrace{v(x - \ln v)}_{vu>0}} \neq 0 \ f\ddot{u}r\ x = 1$$

folgt dass es eine lokale Auflösung $v = v(x,y)$ geben kann. Ferner gilt also

$$z = 2(x - \ln v) + v = 2(x - \ln v(x,y)) + v(x,y) \cong z(x,y) \quad \square$$

Definieren: $v_0 := v(x=1, y=1)$. Aus

$$v'(x,y) = (\partial_x v, \partial_y v) = -\left(\partial_v F\right)^{-1} \cdot \partial_{(x,y)} F = -\left(1 + \frac{1}{v(x - \ln v)}\right)^{-1} \cdot \left(-\frac{1}{x - \ln v}, -1\right)$$

$$\Rightarrow\ v'(1,1) = \left(1 + \frac{1}{v_0(1 - \ln v_0)}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{1 - \ln v_0}, 1\right)$$

folgt

$$\partial_x z(1,1) = 2 - \frac{2}{v_0}\partial_x v + \partial_x v = 2 - \frac{2v_0}{v_0(1 + v_0(1 - \ln v_0))} + \frac{v_0}{1 + v_0(1 - \ln v_0)} = \frac{v_0(3 - 2\ln v_0)}{1 + v_0(1 - \ln v_0)}$$

und analog

$$\partial_y z(1,1) = -\frac{2}{v_0}\partial_y v + \partial_y v = \frac{(1 - \ln v_0) \cdot (v_0 - 2)}{v_0(1 - \ln v_0) + 1}$$

Aufgabe 05

Aus

$$y = u^2 + v^2 = (u+v)^2 - 2uv = x^2 - 2uv \;\Rightarrow\; uv = \frac{x^2 - y}{2}$$

folgt

$$z = u^3 + v^3 = (u+v)^3 - 3uv^2 - 3u^2v = x^3 - 3uv(u+v) = x^3 - \frac{3}{2} \cdot x(x^2 - y) = \frac{1}{2} \cdot (3xy - x^3),\; z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

z ist also für alle $x, y \in \mathbb{R}$ eindeutig bestimmt und in den Umgebungen um (x, y) auflösbar. Die Punkte (x, y, z) wo dies der Fall ist ist die Menge

$$M := \{(x, y, z(x, y)) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

Ferner gilt

$$\partial_x z = \frac{3}{2}(y - x^2),\; \partial_y z = \frac{3x}{2}$$

Da beliebige u, v konkrete x, y implizieren, gilt obere Erkenntnis einfach auch für alle u, v.